Teoría del Caos

Efecto Mariposa

Índice general

Capítulo 1

Teoría del caos

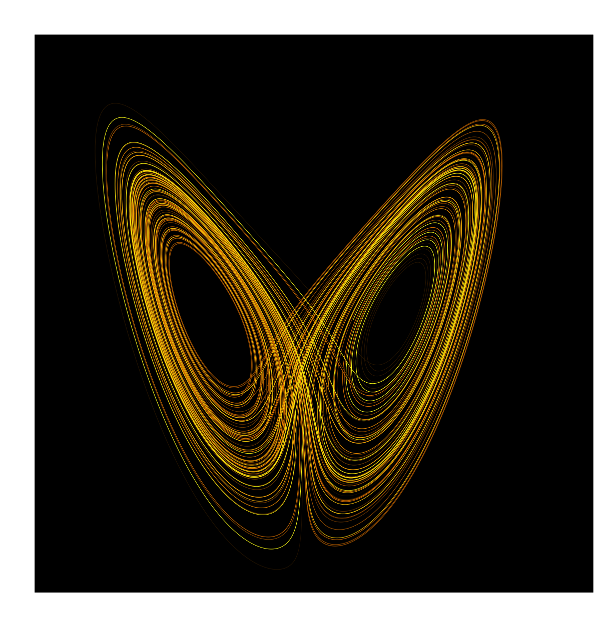


Diagrama de la trayectoria del sistema de Lorenz para los valores r = *28,* σ = *10,* b = *8/3.*

El péndulo doble es uno de los sistemas caóticos más simples que existen. Se observa su trayectoria irregular, además dando al péndulo una posición inicial ligeramente diferente se obtiene una trayectoria completamente diferente pasado un tiempo.

La **teoría del caos** es la denominación popular de la rama de las matemáticas, la física y otras ciencias (biología, meteorología, economía, entre otras) que trata ciertos tipos de sistemas complejos y sistemas dinámicos muy sensibles a las variaciones en las condiciones iniciales. Pequeñas variaciones en dichas condiciones iniciales pueden implicar grandes diferencias en el comportamiento futuro, imposibilitando la predicción a largo plazo. Esto sucede aunque estos sistemas son en rigor deterministas, es decir; su comportamiento puede ser completamente determinado conociendo sus condiciones iniciales.

1.1 Definición

La teoría del caos también explica que el resultado de algo depende de distintas variables y que es imposible de predecir. Por ejemplo, si colocamos un huevo en la cúspide de una pirámide no sabremos hacia donde caerá.

1.2 Clasificación de los sistemas

Los sistemas dinámicos se pueden clasificar básicamente en:

- **Estables**, cuando dos soluciones con condiciones iniciales suficientemente cercanas siguen siendo cercanas a lo largo del tiempo. Así, un sistema estable tiende a lo largo del tiempo a un punto, u órbita, según su dimensión (atractor o sumidero).
- **Inestables**, cuando dos soluciones con condiciones iniciales diferentes acaban divergiendo por pequeñas que sean las condiciones iniciales. Así un sistema inestable “escapa” de los atractores.
- **Caóticos**, cuando el sistema no es inestable y si bien dos soluciones se mantienen a una distancia “finita” cercana a un atractor del sistema dinámico, las soluciones se mueven en torno al atractor de manera irregular y pasado el tiempo ambas soluciones no son cercanas, si bien suelen ser cualitativamente similares. De esa manera, el sistema permanece confinado en una zona de su espacio de estados, pero sin tender a un atractor fijo.

Una de las principales características tanto de los sistemas inestables como los caóticos es que tienen una gran dependencia de las condiciones iniciales (esto diferencia

a ambos tipos de los sistemas estables). De un sistema del que se conocen sus ecuaciones de evolución temporal características, y con unas condiciones iniciales fijas, se puede conocer exactamente su evolución en el tiempo. Pero en el caso de los sistemas caóticos, una mínima diferencia en esas condiciones hace que el sistema evolucione de manera totalmente distinta. Ejemplos de tales sistemas incluyen el Sistema Solar, las placas tectónicas, los fluidos en régimen turbulento y los crecimientos de población. [1]

1.3 Caos determinista

El **caos determinista** comprende una serie de fenómenos encontrados en la teoría de sistemas dinámicos, la teoría de ecuaciones diferenciales y la mecánica clásica. En términos generales el **caos** determinista da lugar a trayectorias asociadas a la evolución temporal de forma muy irregular y aparentemente azarosa que sin embargo son totalmente deterministas, a diferencia del azar genuino. La irregularidad de las trayectorias está asociada a la imposibilidad práctica de predecir la evolución futura del sistema, aunque esta evolución sea totalmente determinista.

1.3.1 Definición de caos y atractores

No hay una definición universal sobre el caos, pero hay tres ingredientes en los que todos los científicos están de acuerdo:

1. **Movimiento oscilante**. Las trayectorias no se ajustan a un punto fijo, órbita periódica u órbita cuasiperiódica cuando $t \to \infty$.
2. **Determinismo**. El sistema no es azaroso sino determinista. El comportamiento irregular, en dimensión finita, surge de la no linealidad. Por eso se define como determinista.
3. **Sensibilidad a las condiciones**. Las trayectorias que comienzan cerca, con el tiempo se separan exponencialmente. Es decir, condiciones iniciales muy similares acaban dando lugar a comportamientos diferentes pasado un tiempo suficientemente largo.

Los sistemas caóticos típicamente se caracterizan por ser modelizables mediante un sistema dinámico que posee un atractor. Para definir propiamente un atractor hay que recurrir a tecnicismos, y es difícil dar una idea intuitiva sin ellos. En una primera aproximación puede decirse que un atractor es un conjunto en el que todas las trayectorias cercanas convergen. Los puntos fijos y círculos límite son un ejemplo de ello. Al igual que en la definición del caos, hay 3 ingredientes universales:

1. Cualquier trayectoria que esté en un atractor, estará en él para $t \to \infty$.
2. Atraen un conjunto de condiciones iniciales. El conjunto lo componen las condiciones iniciales de su trayectoria que acabe en el atractor cuando $t \to \infty$.
3. No existen condiciones iniciales que satisfagan las dos reglas anteriores.

Dentro de los atractores se define como atractor extraño o caótico cuando el atractor exhibe dependencia sensible con las condiciones iniciales.

1.3.2 La importancia de la no linealidad en dimensión finita

Hay dos importantes tipos de sistemas dinámicos: las ecuaciones diferenciales y los sistemas iterativos de funciones. Las ecuaciones diferenciales describen la evolución de un sistema a tiempo real y los mapas iterados evolucionan en problemas donde el tiempo es discreto. Ambos son útiles para dar ejemplos del caos y también para analizar soluciones periódicas o caóticas de las ecuaciones diferenciales.

Se dice que un sistema es no lineal cuando la potencia de las variables de ese sistema es diferente a uno, hay productos entre diferentes variables o funciones de las variables, por ejemplo:

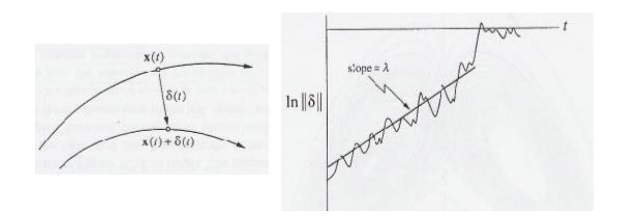
$$x_1^2\,,\, x_1 \cdot\, x_2\,,\, \cos x_2$$

La mayoría de sistemas no lineales son analíticamente irresolubles. En estos casos se puede lograr alguna solución haciendo una aproximación, pero se pierden soluciones físicas. La razón de que las ecuaciones lineales sean más fáciles de analizar es que los sistemas lineales se pueden separar en partes, resolver cada una de ellas y juntar las soluciones para obtener la solución final. El hecho es que muchas cosas en la naturaleza actúan de forma no lineal.

La importancia que tienen los sistemas en el caos es el siguiente: se dice que un sistema dinámico es no sensible cuando pequeños cambios en las condiciones iniciales del sistema no originan grandes cambios en el proceso y resultado final del mismo.

1.3.3 Divergencia exponencial de trayectorias cercanas

Los atractores exhiben una dependencia sensible de las condiciones iniciales. Esto significa que dos trayectorias que comienzan cerca una de la otra divergen, y cada una tendrá un futuro totalmente diferente de la otra. Haciendo estudios numéricos de los atractores extraños se puede encontrar la siguiente proporción:



Tiempo de horizonte. Exponente de Lyapunov.

$$\|\delta\| \approx \|\delta_0\| e^{\lambda t}$$

donde $\delta(t)$ es el vector que separa 2 trayectorias, δ_0 es la separación inicial y λ es el exponente Lyapunov. Cuando el sistema tiene un exponente de Lyapunov positivo ($\lambda > 0$), se encuentra un tiempo de horizonte donde la predicción deja de ser válida. Si se toma a como el valor máximo de la distancia aceptable entre dos trayectorias (la predicción será intolerable cuando $\|\delta(t)\| \geq a$), entonces el tiempo de horizonte se define como

$$t_{horizon} \approx \frac{1}{\lambda} \ln \frac{a}{\|\delta_0\|}$$

Lo peor del tiempo de horizonte es que, por mucho que se minimice la separación inicial, no logrará ser mucho más grande. Esto es, aunque se logre una precisión muy buena, el incremento del tiempo de horizonte que se logra será insignificante comparado con la disminución de δ_0 . Por esto, Lorenz dijo que era tan difícil predecir el tiempo. Este obstáculo de la predicción se conoce con el nombre *efecto mariposa* por una charla de Lorenz con el título "*¿Puede el batir de las alas de una mariposa en Brasil dar lugar a un tornado en Texas?*".

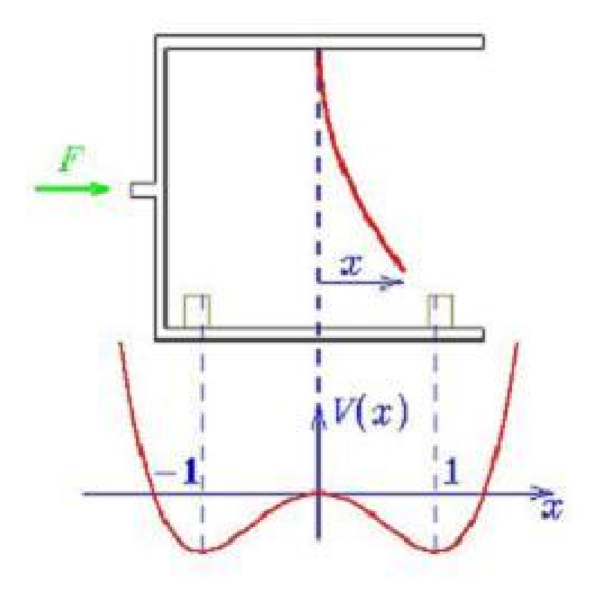
La sensibilidad a las condiciones es tan extremadamente exagerada que, aparte del provocativo título de la charla de Lorenz, se encuentran otras frases como,

> Por perder un clavo, el caballo perdió la herradura, el jinete perdió al caballo, el jinete no combatió, la batalla se perdió, y con ella perdimos el reino.

Si se dibuja una gráfica con los ejes $\ln ||\delta||$ y t , se observa que para un corto plazo de t , la función se mueve alrededor de una pendiente. El valor de esta pendiente equivale al exponente de Lyapunov. Como se observa en el ejemplo de abajo, después de un tiempo la función no continúa cerca de la pendiente. Esto es debido a que, como el atractor está acotado en un espacio del espacio de fases, la distancia no puede aumentar hasta el infinito.

1.3.4 Atractores

El comportamiento o movimiento en un sistema dinámico puede representarse sobre el espacio de fases. Los diagramas de fases no muestran una trayectoria bien definida, sino que ésta es errabunda alrededor de algún movimiento bien definido. Cuando esto sucede se dice que el sistema es atraído hacia un tipo de movimiento, es decir, que hay un atractor.



Modelo matemático.

Al hablar de atractores no se hace referencia única y exclusivamente a los atractores caóticos, ya que antes de que apareciera el caos se conocían otros tipos de atractores. De acuerdo a la forma en que sus trayectorias evolucionen, los atractores pueden ser clasificados como:

- **Atractor de punto fijo**: Corresponde al más simple, el sistema que tenga un atractor de punto fijo tenderá a estabilizarse en un único punto. Un ejemplo común es el péndulo, que tiende al punto en el que el ángulo es nulo respecto a la vertical, debido al rozamiento con el aire.

- **Atractor de ciclo límite** o **atractor periódico**: Es el segundo tipo de atractor más sencillo. Este tipo de atractor tiende a mantenerse en un periodo igual para siempre. Como ejemplo, se puede tomar un péndulo alimentado para contrarrestar la fuerza de rozamiento, por lo que oscilaría de lado a lado.

- **Atractor caótico**: Aparece en sistemas no lineales que tienen una gran sensibilidad a las condiciones. Un famoso ejemplo de estos atractores es el atractor de Lorenz.

Estos nombres se relacionan exactamente con el tipo de movimiento que provocan en los sistemas. Un atractor periódico, por ejemplo, puede guiar el movimiento de un péndulo en oscilaciones periódicas; sin embargo, el péndulo seguirá trayectorias erráticas alrededor de estas oscilaciones debidas a otros factores menores no considerados.

Ejemplos de atractores

Se verá una introducción de estos distintos tipos de atractores con un modelo matemático muy usado para explicar el caos. Consiste en una varilla de acero con un extremo fijado a un soporte y el otro libre para oscilar entre dos imanes colocados simétricamente. El soporte de la varilla se halla sometido a una fuerza armónica $F = f\cos\omega t$, como se observa en la figura del modelo matemático.

Es fácilmente observable que cuando la varilla está en posición vertical, hay un punto de equilibrio inestable entre dos puntos de equilibrio estables situados simétricamente. El potencial de este sistema es

$$V(x) = -\frac{1}{4}x^2(2-x^2)$$

de modo que la ecuación de movimiento será,

$$\ddot{x} = -V'(x) = x - x^3$$

Si ahora se agrega una fuerza de rozamiento del aire proporcional a la velocidad (- $\gamma\dot{x}$) y una fuerza externa armónica, se logra la ecuación de Duffing:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} - x + x^3 = f\cos\omega t$$

A continuación se ve cómo el término no lineal x^3 tiene consecuencias dinámicas asombrosas.

Suponiendo que inicialmente no se tiene fricción ($\gamma = 0$) ni fuerza externa ($f = 0$), el sistema es conservativo y se tendrá una integral primera que proporciona las trayectorias en el espacio de fases $(x, \dot{x})$:

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{4}x^2(2-x^2) = E$$

En los mínimos de la energía potencial se observa que los puntos son estables mientras que el máximo corresponde a un punto de silla inestable. Las trayectorias de energía nula son órbitas homoclínicas que se hallan tanto en la variedad estable como en la inestable. Las demás trayectorias corresponden a oscilaciones periódicas cuyas órbitas encierran un solo punto estable ($E < 0$) o ambos ($E > 0$).

Si ahora se tiene en cuenta el rozamiento, se obtendrán oscilaciones amortiguadas, por lo que es lógico pensar que el sistema perderá energía monótonamente, mientras el tiempo transcurra. En consecuencia, las trayectorias tenderán a uno de los atractores de punto fijo.

Si ahora, además del rozamiento, se introduce una fuerza externa armónica que contrarresta a la fuerza de rozamiento, el sistema ya no tenderá al equilibrio. Al ser una fuerza armónica se encuentran soluciones periódicas (ciclos límite), pero nada que ver con los periodos de los que se habla cuando el sistema es conservativo ($\gamma = f = 0$). En este caso los periodos son independientes de la energía por la fuerza de rozamiento y la armónica, así que los periodos dependen de la fuerza armónica externa.

Al aumentar la fuerza externa ($f = 0.3$), las órbitas periódicas desaparecen y oscilan sin cesar sin ninguna regularidad. Además de la irregularidad del sistema, este exhibe una gran sensibilidad a las condiciones iniciales por lo que nos encontramos ante un atractor extraño (o caótico).

En conclusión, para que haya caos en dimensión finita se necesita que se cumplan los siguientes 3 puntos en un sistema:

1. El sistema debe ser no lineal.
2. El sistema debe tener mínimo 3 variables (puede ser por ejemplo de 2 variables y no autónomo).
3. El sistema debe tener dependencia sensible a las condiciones iniciales.

Cuando el modelo matemático tenía $f = 0$ era un sistema no lineal, pero al introducir $f = 0.23$ se logra la tercera variable, el tiempo. Aunque no tenía dependencia a las condiciones iniciales. Por eso se ha de remarcar que el caos implica que el sistema sea de 3 o más variables, pero 3 o más variables no implican que haya caos.

Una manera de visualizar el movimiento caótico, o cualquier tipo de movimiento, es hacer un diagrama de fases del movimiento. En tal diagrama el tiempo está implícito y cada eje representa una dimensión del estado. Por ejemplo, un sistema en reposo será dibujado como un punto, y un sistema en movimiento periódico será dibujado como un círculo.

Atractores extraños

La mayoría de los tipos de movimientos mencionados en la teoría anterior suceden alrededor de atractores muy simples, tales como puntos y curvas circulares llamadas *ciclos límite*. En cambio, el movimiento caótico está ligado a lo que se conoce como atractores extraños, que pueden llegar a tener una enorme complejidad como, por ejemplo, el modelo tridimensional del sistema climático de Lorenz, que lleva al famoso atractor de Lorenz. El atractor de Lorenz es, quizá, uno de los diagramas de sistemas caóticos más conocidos, no sólo porque fue uno de los primeros, sino también porque es uno de los más complejos y peculiares, pues desenvuelve una forma particular, parecida a las alas de una mariposa.

Los atractores extraños están presentes tanto en los sistemas continuos dinámicos (tales como el sistema de Lorenz) como en algunos sistemas discretos (por ejemplo,

la aplicación de Hénon). Otros sistemas dinámicos discretos tienen una estructura repelente, de tipo conjunto de Julia, la cual se forma en el límite entre las cuencas de dos puntos de atracción fijos. Julia puede ser sin embargo un atractor extraño. Ambos, atractores extraños y atractores tipo conjunto de Julia, tienen típicamente una estructura de fractal.

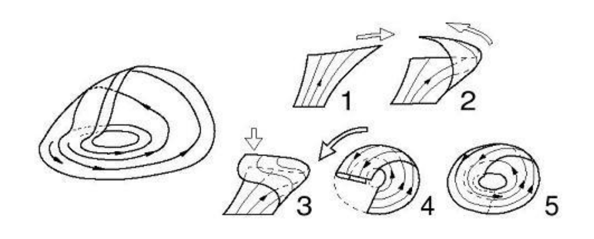
El teorema de Poincaré-Bendixson muestra que un atractor extraño sólo puede presentarse como un sistema continuo dinámico si tiene tres o más dimensiones. Sin embargo, tal restricción no se aplica a los sistemas discretos, los cuales pueden exhibir atractores extraños en dos o incluso una dimensión.

Algo más de atractores

Los atractores extraños son curvas del espacio de fases que describen la trayectoria elíptica de un sistema en movimiento caótico. Un sistema con estas características es impredecible, conocer su configuración en un momento dado no permite predecirla con certeza en un momento posterior. De todos modos, el movimiento no es absolutamente aleatorio.

En la mayoría de sistemas dinámicos se encuentran elementos que permiten un tipo de movimiento repetitivo y, a veces, geométricamente establecido. Los atractores son los encargados de que las variables que inician en un punto de partida mantengan una trayectoria establecida, y lo que no se puede establecer de una manera precisa son las oscilaciones que las variables puedan tener al recorrer las órbitas que lleguen a establecer los atractores. Por ejemplo, es posible ver y de cierta manera prever la trayectoria de un satélite alrededor de la Tierra; lo que aparece, en este caso, como algo indeterminado son los movimientos e inconvenientes varios que se le pueden presentar al objeto para efectuar este recorrido.

1.3.5 Transformación del panadero



Atractor de Rössler.

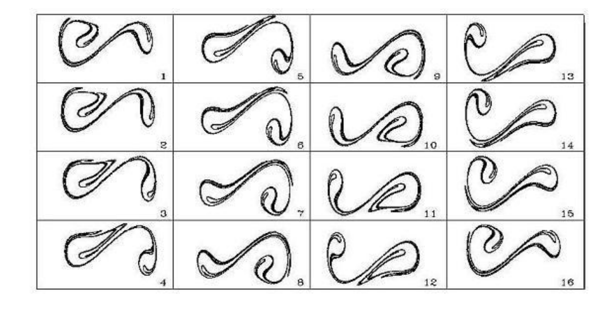
En los atractores extraños se observan órbitas irregulares, que las trayectorias divergen exponencialmente y que permanecen en un espacio de fases acotado. Para explicar estas propiedades se usará la transformación del panadero que consiste en un doble proceso de estirar y plegar.

Este doble proceso de estirar (para separar exponencialmente las trayectorias) y plegar (para que la región del espacio de fases se mantenga acotado) es un mecanismo fundamental del caos determinista. A este proceso se le denomina **transformación del panadero**, porque el proceso de homogeneizar la masa consiste también en estirar (para homogeneizar) y plegar (para tener unas dimensiones manejables) la masa repetidas veces.

Al repetir infinitas veces el proceso, se logran infinitas capas que le dan al atractor una estructura fractal. Un ejemplo de esto se puede apreciar en el atractor de Rössler. Viendo el gráfico se observa cómo en el número 1 se estira y en el 3 se pliega. Cogiendo el 3 y volviendo a aplicar el proceso, se obtiene el doble de capas.

Otro ejemplo para explicar la trasformación es la ecuación de Duffing. En este caso como $f \neq 0$ el espacio de fases es tridimensional. Pero al aparecer t en un coseno, una dimensión es cíclica, por lo que para visualizar el atractor se considera una sección estroboscópica para valores $t = t_0 + 2n\pi$, ($n = 0, 1, ...$) .

En el siguiente dibujo hay 16 secciones por lo que $t_0 = (k-1)\pi/8$, ($k = 1, 2, ..., 16$)



Secciones estroboscópicas del atractor de Duffing: mirando con atención el gráfico, se ve claramente la transformación del panadero. Esto es, se aprecia cómo a la vez que se estira se pliega sobre sí mismo.

1.4 Breve historia

El caos y los fractales son parte de un tema más amplio, la dinámica, rama de la física que empezó a mediados de 1600 cuando Isaac Newton descubrió las ecuaciones diferenciales, las leyes de movimiento y la gravitación general. Con estos elementos Newton resolvió problemas de dos cuerpos que interactúan por medio de la gravedad pero, lo que de verdad le llamaba la atención era el movimiento de la Luna y su generalización conocida con el nombre de problema de los tres cuerpos. Las siguientes generaciones de matemáticos y físicos trataron problemas de tres cuerpos y notaron que resultaban mucho más difíciles que los problemas de dos cuerpos, hasta el punto de darlos como imposibles.

1.4.1 El determinismo laplaciano

En 1776 el matemático francés Pierre Simon de Laplace comenzó a publicar los 5 volúmenes del *Traité de Mécanique Céleste*, donde el autor afirmaba categóricamente que, si se conociera la velocidad y la posición de todas las partículas del Universo en un instante, se podría predecir su pasado y su futuro. Por más de 100 años su afirmación pareció correcta y, por ello, se llegó a la conclusión de que el libre albedrío no tenía espacio en mecánica clásica, ya que todo estaba determinado por el estado del Universo en un tiempo anterior.

El determinismo laplaciano consistía en afirmar que, si se conocen las leyes que gobiernan los fenómenos estudiados (y estas son deterministas como en mecánica clásica), se conocen las condiciones iniciales y se es capaz de calcular la solución, entonces se puede predecir con total certeza el futuro del sistema estudiado.

1.4.2 El cuestionamiento de Poincaré

A finales del siglo XIX Henri Poincaré (1854-1912), matemático francés, introdujo un nuevo punto de vista al preguntarse si el Sistema Solar sería estable para siempre. Poincaré fue el primero en pensar en la posibilidad del caos, en el sentido de comportamiento que dependiera sensiblemente en las condiciones iniciales. En 1903 Poincaré postulaba acerca de lo aleatorio y del azar en los siguientes términos:

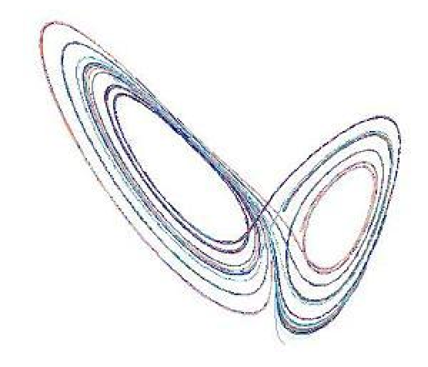
> El azar no es más que la medida de la ignorancia del hombre.

reconociendo, a la vez, la existencia de innumerables fenómenos que no eran completamente aleatorios, que simplemente no respondían a una dinámica lineal, aquellos a los que pequeños cambios en las condiciones iniciales conducían a enormes cambios en el resultado.

Algunas de las propiedades identificadas por Poincaré que hacían imposible la predicción a largo plazo se encontraron en la práctica en sistemas físicos tales como el clima, la sangre cuando fluye a través del corazón, las turbulencias, las formaciones geológicas, los atascos de vehículos, las epidemias, la bolsa o la forma en que las flores florecen en un prado.

1.4.3 El aporte de Lorenz

El comienzo de la reciente historia del caos se sitúa en la década de 1950 cuando se inventaron los ordenadores y se desarrollaron algunas intuiciones sobre el comportamiento de los sistemas no lineales. Esto es, cuando se vieron las primeras gráficas sobre el comportamiento de estos sistemas mediante métodos numéricos. En 1963 Edward Lorenz trabajaba en unas ecuaciones, las mundialmente conocidas como ecuaciones de Lorenz, que esperaba predijeran el tiempo en la atmósfera, y trató mediante los ordenadores de ver gráficamente el comportamiento de sus ecuaciones. Los ordenadores de aquella época eran muy lentos, por eso se dice que Lorentz fue a tomar un té mientras el ordenador hacía los cálculos, y cuando volvió se encontró con una figura que ahora se conoce como atractor de Lorenz.



Atractor de Lorenz.

Pensó que se había cometido algún error al ejecutar el programa y lo intentó repetidas veces, logrando siempre el mismo resultado hasta que se dio cuenta de que algo pasaba con el sistema de ecuaciones simplificado con el que estaba trabajando. Después de estudiar detenidamente el problema y hacer pruebas con diferentes parámetros (tanto iniciales como las constantes del sistema), Lorenz llegó a la conclusión de que las simulaciones eran muy diferentes para condiciones iniciales muy próximas. Al llegar a la misma, recordó que en el programa que él había creado para su sistema de meteorología con la computadora *Royal McBee*, se podían introducir un máximo de 3 decimales para las condiciones iniciales, aunque el programa trabajaba con 6 decimales y los 3 últimos decimales que faltaban se introducían aleatoriamente. Lorenz publicó sus descubrimientos en revistas de meteorología, pasando desapercibidos durante casi una década.

La década de 1970 fue el boom del caos. En 1971 David Ruelle y Floris Takens propusieron una nueva teoría para la turbulencia de fluidos basada en un atractor extraño. Años después el ecólogo teórico Robert May en 1976 encontró ejemplos de caos en dinámica de poblaciones usando la ecuación logística discreta. A continuación llegó el más sorprendente descubrimiento de todos de la mano de Feigenbaum. Él descubrió que hay un conjunto de leyes universales concretas que diferencian la transición entre el comportamiento regular y el caos, por tanto, es posible que dos sistemas evolucionen hacia un comportamiento caótico igual.

1.4.4 Ecuaciones de Lorenz

El primer sistema de ecuaciones bien caracterizado que exhibía comportamiento caótico fue el sistema de ecua-

ciones propuesto por Lorenz:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y-x)\\ \dot{y} &= rx-y-xz\\ \dot{z} &= xy-bz\end{aligned}$$

donde σ es el número de Prandtl (viscosidad/conductividad térmica), r es el número de Rayleigh (John Strutt) (diferencia de temperatura entre base y tope) y b es la razón entre la longitud y altura del sistema.

Lorenz observó dos cosas fundamentales que ocurrían en su ecuación:

1. Cualquier diferencia en las condiciones iniciales antes de los cálculos, incluso infinitesimal, cambiaba de forma drástica los resultados. Tan sólo se podía predecir el sistema por cortos períodos. Llevando eso a la meteorología, suponía lo que se llamó efecto mariposa, hipersensibilidad a las condiciones iniciales.
2. A pesar de lo anterior, la impredecibilidad del sistema, lejos de ser un comportamiento al azar, tenía una curiosa tendencia a evolucionar dentro de una zona muy concreta del espacio de fases, situando una especie de pseudocentro de gravedad de los comportamientos posibles.

Las ecuaciones de Lorenz fueron propuestas como un modelo muy simplificado de la convección en forma de anillos que parece ocurrir a veces en la atmósfera terrestre. Por ello, las tres magnitudes a las que Lorenz se refiere en su sistema son,

- $x \to$ Razón de rotación del anillo.
- $y \to$ Gradiente de temperatura.
- $z \to$ Desviación de la temperatura respecto a su valor de equilibrio.

Lorenz descubrió que su sistema contenía una dinámica extremadamente errática. Las soluciones oscilaban irregularmente sin llegar a repetirse, aunque lo hacían en una región acotada del espacio de fases. Vio que las trayectorias rondaban siempre alrededor de lo que ahora se define como atractor extraño. El sistema de Lorenz es disipativo.

1.5 Aplicaciones

La teoría del caos y la teoría de sistemas dinámicos cuentan actualmente con numerosas aplicaciones tanto en ciencias naturales como en tecnología y ciencias sociales. Se han desarrollado aplicaciones prácticas en el campo del control, la caracterización y el modelado de sistemas complejos. Durante las cuatro décadas que siguieron a los años 1960 aumentó mucho la literatura sobre los sistemas complejos y la teoría del caos, así como las temáticas y aplicaciones alumbradas a raíz de la investigación en dicho campo interdisciplinar.

En *Teoría del Caos, el tercer paradigma*, se explica cómo la estadística inferencial trabaja con modelos aleatorios para crear *series caóticas predictoras* para el estudio de eventos presumiblemente caóticos en las ciencias sociales.

1.5.1 En meteorología

El tiempo atmosférico, además de ser un sistema dinámico, es muy sensible a los cambios en las variables iniciales, es un sistema transitivo y también sus órbitas periódicas son densas, lo que hace del tiempo un sistema apropiado para trabajarlo con matemática caótica. La precisión de las predicciones meteorológicas es relativa, y los porcentajes anunciados tienen poco significado sin una descripción detallada de los criterios empleados para juzgar la exactitud de una predicción.

Al final del siglo XX se ha vuelto común atribuirles una precisión de entre 80 y 85% en plazos de un día. Los modelos numéricos estudiados en la teoría del caos han introducido considerables mejoras en la exactitud de las previsiones meteorológicas en comparación con las predicciones anteriores, realizadas por medio de métodos subjetivos, en especial para periodos superiores a un día. Actualmente es posible demostrar la confiabilidad de las predicciones específicas para periodos de hasta cinco días gracias a la densidad entre las órbitas periódicas del sistema y se han logrado algunos éxitos en la predicción de variaciones anormales de la temperatura y la pluviosidad para periodos de hasta 30 días.

Antes de la aparición de la Teoría del Caos, se pensaba que para que el tiempo llegara a ser predecido con exactitud newtoniana no era más que una cuestión de introducir más y más variables en un ordenador lo suficientemente potente como para procesarlas. Sin embargo, de unas pocas variables de hace tan sólo unas décadas se ha pasado a considerar cientos de miles de variables sin conseguir la predicibilidad esperada. El clima, como sistema caótico, ha de entenderse como un sistema impredecible dentro de un atractor que le confiere cierto orden a través de las estaciones. Más recientemente se ha probado que el carácter caótico del tiempo atmosférico tiene que ver con las propiedades geométricas del grupo de evolución del sistema climático terrestre, en concreto dicho grupo puede dotarse de la estructura de una variedad de Riemann de dimensión infinita con curvatura negativa, lo cual implica que curvas arbitrariamente cercanas acaban divergiendo en el tiempo. Estos resultados sugieren una imposibilidad práctica de predecir el tiempo atmosférico a medio y largo plazo. El clima es sensible a pequeñas variaciones en las condiciones iniciales y la determinación de las con-

diciones iniciales con exactitud está abocado al fracaso a causa del Principio de incertidumbre de Heisenberg. Se ha estimado que una predicción a dos meses vista requeriría conocer las condiciones iniciales con una precisión unas 100 mil veces superior a la precisión obtenida por dicha predicción.

1.5.2 En medicina

El análisis de las series temporales procedentes de electrocardiogramas y encefalogramas que en algunos detalles presentan detalles aparentemente aleatorios, parecen estar generados por una dinámica que de hecho es un sistema caótico. Los exponentes y parámetros matemáticos que caracterizan dichas series han podido ser usados como medio de diagnóstico de ciertas patologías. Esto permite un diagnóstico precoz de algunas de esas patologías.

1.6 Véase también

- Artículos sobre teorías en la Wikipedia.
- Oscilador de van der Pol
- Fractal
- Dinámica de sistemas
- Problema de los tres cuerpos
- Problema de los n cuerpos
- Estabilidad del sistema solar
- Ilya Prigogine
- René Thom

1.7 Referencias

[1] «Análisis Computacional de Modelos Biológicos para su Aplicación a Modelos Económicos». CIT Internacional.

1.7.1 Bibliografía

- Solé, R. V., y Manrubia, S. C. (2001). *Orden y caos en sistemas complejos*. Universidad Politécnica de Cataluña, ISBN 9788483014301
- (en inglés) T. W. B. Kibble et F.H. Berkshire, *Classical Mechanics*, Prentice Hall, $4\times10^{\{\{\{1\}\}\}}$ édition, 1997 ISBN 0-582-25972-X.
- (en inglés) Kathleen T. Alligood, Tim Sauer et Plantilla:Lien, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, Springer-Verlag, 1997 ISBN 978-0-387-94677-1
- (en inglés) David Ruelle, *Deterministic chaos: the science and the fiction*, Proceedings of the Royal Society London **A 427** (1990), 241-248
- (en francés) Henri Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, 3 volumes, Éditions Gauthiers-Villars, 1892
- (en francés) Jacques Hadamard, *Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques*, Journal de mathématiques pures et appliquées **4** (1898), 27. Pour une revue plus récente, voir e.g. la référence suivante : Plantilla:Lien, *Le flot géodésique des variétés Riemanniennes à courbure négative*, Séminaire Bourbaki **738** (1991) publié dans : Astérisque 201-203 (1991) 269-298.
- (en inglés) Vladimir Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, $2\times10^{\{\{\{1\}\}\}}$ édition, 1989 ISBN 0-387-96890-3.
- (en inglés) Vladimir Arnold, V.V. Kozlov et A.I. Neishtadt, *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Springer-Verlag ($2\times10^{\{\{\{1\}\}\}}$ édition-1993). Une synthèse de l'état de l'art en mécanique céleste, par l'un des plus brillants mathématiciens du domaine (Arnold) et ses collaborateurs. À partir du second cycle universitaire.
- (en inglés) Vladimir Arnold y André Avez, *Ergodic problems of classical mechanics*, Advanced Book Classics, Addison-Wesley, 1988.
- (en inglés) David Ruelle et Jean-Pierre Eckman, *Ergodic theory of chaos and strange attractors*, Review of Modern Physisc **57** (1985), 617-656
- (en inglés) Vladimir Damgov, *Nonlinear and parametric phenomena - Applications in radiophysical and mechanical systems,* World Scientific, Series on Nonlinear Sciences, 2004
- (en inglés) Robert May, *Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics*, Nature, Vol. 261, p. 459, June 10, 1976
- Moon, Francis (1990). *Chaotic and Fractal Dynamics*. Springer-Verlag New York, LLC. ISBN 0-471-54571-6.
- Ott, Edward (2002). *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press New, York. ISBN 0-521-01084-5.
- Gutzwiller, Martin (1990). *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*. Springer-Verlag New York, LLC. ISBN 0-387-97173-4.
- Hoover, William Graham (1999,2001). *Time Reversibility, Computer Simulation, and Chaos*. World Scientific. ISBN 981-02-4073-2.

- González-Miranda, J. M. (2004). *Synchronization and Control of Chaos. An introduction for scientists and engineers*. Imperial College Press. ISBN 1-86094-488-4.

1.7.2 Enlaces externos

- Artículo divulgativo sobre el creciente aporte de la Teoría del Caos en Medicina Servicio de divulgación científica DivulgaUNED (Universidad Nacional de Educación a Distancia de España, octubre de 2009).
- Alcances y limitaciones de la Teoría del Caos aplicada al análisis del Comportamiento Organizacional, Cultural y la necesidad del cambio De la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas
- Fundamentos matemáticos de la sinergética. Caos, estructuras y simulación por ordenador
- Modelado y Simulación de un Oscilador Caótico usando MatLab
- Wikimedia Commons alberga contenido multimedia sobre **Fractales**Commons.

Capítulo 2

Efecto mariposa

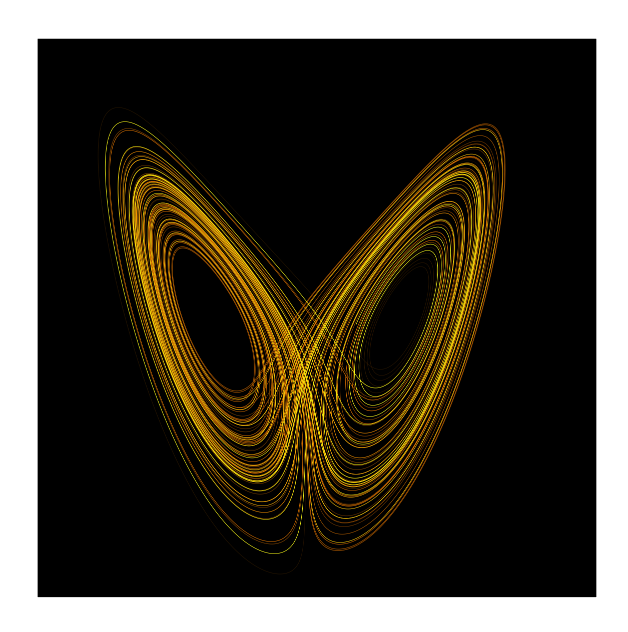


Diagrama del atractor extraño que posee el modelo de Lorenz para el tiempo atmosférico, para los valores r = 28, *σ = 10,* b = *8/3. Si bien este "atractor" del modelo tiene forma de mariposa, el nombre del concepto no tiene en sí mismo nada que ver con la forma del atractor.*

El **efecto mariposa** es un concepto de la teoría del caos. La idea es que, dadas unas circunstancias peculiares de el tiempo y condiciones iniciales de un determinado sistema dinámico caótico (más concretamente con dependencia sensitiva a las condiciones iniciales) cualquier pequeña discrepancia entre dos situaciones con una variación pequeña en los datos iniciales, cabe resaltar que sin duda alguna y sin explicación científica, acabará dando lugar a situaciones donde ambos sistemas evolucionan en ciertos aspectos de forma completamente diferente. Eso implica que si en un sistema se produce una pequeña perturbación inicial, mediante un proceso de amplificación, podrá generar un efecto considerablemente grande a corto o medio plazo.

En el ejemplo particular propuesto por **Edward Norton Lorenz**, por el efecto mariposa, si se parte de dos mundos o situaciones globales casi idénticos, pero en uno de ellos hay una mariposa aleteando y en el otro no, a largo plazo, el mundo con la mariposa y el mundo sin la mariposa acabarán siendo muy diferentes. En uno de ellos puede producirse a gran distancia un tornado y en el otro no suceder en absoluto.

2.1 Origen y evolución del concepto Efecto Mariposa

La relación entre el aleteo de una mariposa con acontecimientos remotos puede ya verse sugerida en un antiguo proverbio chino que dice: «el leve aleteo de las alas de una mariposa se puede sentir al otro lado del mundo». Este proverbio aludiría a una visión holística, en la que todos los acontecimientos estarían relacionados y repercutirían los unos en los otros, pero sin implicar necesariamente una repercusión de enorme magnitud a partir de acontecimientos ínfimos.

En tiempos modernos la específica formulación del concepto como *Efecto Mariposa* está íntimamente ligado al surgimiento de la Teoría del caos, que ya sí efectivamente sugiere la posibilidad de que un ínfimo acontecimiento como el aleteo de una mariposa, acaecido en un momento dado, pueda alterar a largo plazo una secuencia de acontecimientos de inmensa magnitud, (al menos para variar el lugar y momento de su aparición, no tanto para aportar la energía para causarlos, que obviamente no posee). Su formulación se la debemos al matemático y meteorólogo estadounidense Edward Norton Lorenz (1938-2008) para explicar el comportamiento caótico de sistemas inestables, tales como el tiempo meteorológico, expuesto en su artículo de 1963: "Flujo determinista no periódico".[1] Lorenz comunicó este concepto a una audiencia general, *en forma de pregunta, no de afirmación*, durante una conferencia[2] en la reunión anual de 1972 de la A.A.A.S., (American Association for the Advancement of Science), en el M.I.T., con el título: ***Predictability; Does the Flap of a Butterfly's wings in Brazil Set Off a Tornado in Texas?***, (Predictibilidad, ¿El aleteo de una mariposa en Brasil hace aparecer un tornado en Tejas?). Por falta de modelos metereólogicos que pudieran apoyar esa posibilidad, Lorenz tuvo cuidado en advertir que no estaba sugiriendo que la respuesta a su pregunta fuera necesariamente positiva, *«Lest I appear frivolous in even posing the title question, let alone suggesting that it*

might have an affirmative answer ...».

Anteriormente, Lorenz había usado el ejemplo de una gaviota provocando una tormenta pero finalmente lo hizo más poético con la mariposa, siguiendo las recomendaciones de unos colegas.

Lorenz trabajaba en 1960 en la predicción del tiempo meteorológico con la ayuda de ordenadores y, al repetir unos cálculos introduciendo valores anteriormente obtenidos, observó cambios drásticos en los resultados del tiempo meteorológico previsto a largo plazo tras efectuar un *levísimo redondeo*, (la impresora, para ahorrar espacio recogía sólo tres cifras decimales del valor de una determinada magnitud, [0,506], que él introdujo como valor inicial para continuar los cálculos, [considerando que el error era insignificante], en lugar de introducir el valor más preciso almacenado en la memoria del ordenador, [0,506127]). Esta es su propia descripción:

> «En un momento dado, decidí repetir algunos de los cálculos con el fin de examinar con mayor detalle lo que estaba ocurriendo. Detuve el ordenador, tecleé una línea de números que había salido por la impresora un rato antes y lo puse en marcha otra vez. Me fui al vestíbulo a tomarme una taza de café y regresé al cabo de una hora, tiempo durante el cual el ordenador había simulado unos dos meses de tiempo meteorológico. Los números que salían por la impresora no tenían nada que ver con los anteriores. Inmediatamente pensé que se había estropeado alguna válvula o que el ordenador tenía alguna otra avería, cosa nada infrecuente, pero antes de llamar a los técnicos decidí comprobar dónde se encontraba la dificultad, sabiendo que de esa forma podría acelerar la reparación. En lugar de una interrupción brusca, me encontré con que los nuevos valores repetían los anteriores en un principio, pero que enseguida empezaban a diferir, en una, en varias unidades, en la última cifra decimal, luego en la anterior y luego en la anterior. La verdad es que las diferencias se duplicaban en tamaño más o menos constantemente cada cuatro días, hasta que cualquier parecido con las cifras originales desaparecía en algún momento del segundo mes. Con eso me bastó para comprender lo que ocurría: los números que yo había tecleado no eran los números originales exactos sino los valores redondeados que había dado a la impresora en un principio. Los errores redondeados iniciales eran los culpables: se iban amplificando constantemente hasta dominar la solución. Dicho con terminología de hoy: se trataba del caos.»
>
> Edward Lorenz en *La esencia del Caos*[3]

En 1987 el término "efecto mariposa" despegó gracias al bestseller "Caos: la creación de una ciencia", de James Gleick.[4] Entonces fue cuando el descubrimiento de Lorenz llegó al público general, con una gran repercusión y popularidad.

James Gleick resumió lo sucedido de este modo:

> «En una determinada ocasión quiso volver a echar un vistazo a una simulación que ya había hecho, llevándola más lejos en el tiempo. En vez de comenzar desde el principio y esperar a que el ordenador llegara al intervalo que le interesaba, introdujo en el teclado los valores que ya tenía apuntados en el papel. Dejó la máquina trabajando y se fue a tomar un café. Después de una hora, la máquina había simulado dos meses de predicción atmosférica, y sucedió lo inesperado: Existían valores de los días que había simulado anteriormente que no coincidían con los que había calculado esta vez... De repente comprendió la verdad... El ordenador almacenaba seis decimales: 0,506127. En la impresión, para ahorrar espacio, aparecían únicamente tres: 0,506... Lorenz había introducido la expresión más corta, redondeada, convencido de que la diferencia - una milésima parte - era de poca importancia. En el sistema de ecuaciones de Lorenz, los errores ínfimos tenían efectos catastróficos»
>
> James Gleick en *Caos: la creación de una ciencia*

2.2 Consecuencias generales

Esta interrelación de causa-efecto se da en todos los eventos de la vida. Un pequeño cambio puede generar grandes resultados o, hipotéticamente, «el aleteo de una mariposa en Hong Kong puede desatar una tempestad en Nueva York».

La consecuencia práctica del efecto mariposa es que en sistemas complejos tales como el estado del tiempo o la bolsa de valores es muy difícil predecir con seguridad en un mediano rango de tiempo. Los modelos finitos que tratan de simular estos sistemas necesariamente descartan información acerca del sistema y los eventos asociados a él. Estos errores son magnificados en cada unidad de tiempo simulada hasta que el error resultante llega a exceder el cien por ciento.

2.3 Referencias

[1] Deterministic Nonperiodic Flow. Journal of Atmospheric Sciences. Vol.20 : 130—141, 1963 link

[2] Conferencia de Edward Lorenz del 29 de diciembre de 1972 en el Massachusetts Institute of Technology (M.I.T.), de Cambridge, (E.E.U.U.) link

[3] Edward Lorenz, The Essence of Chaos, University of Washington Press, 1996.

[4] James Gleick, Chaos: Making a New Science, Viking Books, 1987.

2.3.1 Bibliografía

- Gleick, James. *Chaos: Making a new science*. Random House, 1997. (trad. esp. *Caos: la creación de una ciencia*)

2.3.2 Enlaces externos

- Modelo de simulación del Butterfly Effect
- El efecto mariposa en El Rincón de la Ciencia
- *El ruido de un trueno*, cuento de Ray Bradbury que refleja el Efecto Mariposa
- Dinámica de sistemas
- Sistema complejo
- Sistema dinámico

Capítulo 3

Fractal



En la naturaleza también aparece la geometría fractal, como en este brécol romanesco.

Un **fractal** es un objeto geométrico cuya estructura básica, fragmentada o aparentemente irregular, se repite a diferentes escalas.[1] El término fue propuesto por el matemático Benoît Mandelbrot en 1975 y deriva del latín *fractus*, que significa quebrado o fracturado. Muchas estructuras naturales son de tipo fractal. La propiedad matemática clave de un objeto genuinamente fractal es que su dimensión métrica fractal es un número no entero.

Si bien el término "fractal" es reciente, los objetos hoy denominados fractales eran bien conocidos en matemáticas desde principios del siglo XX. Las maneras más comunes de determinar lo que hoy denominamos dimensión fractal fueron establecidas a principios del siglo XX en el seno de la teoría de la medida.

3.1 Introducción

La definición de fractal desarrollada en los años 1970 dio unidad a una serie de ejemplos, algunos de los cuales se remontaban a un siglo atrás. A un objeto geométrico fractal se le atribuyen las siguientes características:[2]

- Es demasiado irregular para ser descrito en términos geométricos tradicionales.
- Es autosimilar, su forma es hecha de copias más pequeñas de la misma figura.

Las copias son similares al todo: misma forma pero diferente tamaño. Ejemplos de autosimilaridad

  - **Fractales naturales** son objetos naturales que se pueden representar con muy buena aproximación mediante fractales matemáticos con autosimilaridad estadística. Los fractales encontrados en la naturaleza se diferencian de los fractales matemáticos en que los naturales son aproximados o estadísticos y su autosimilaridad se extiende solo a un rango de escalas (por ejemplo, a escala cercana a la atómica su estructura difiere de la estructura macroscópica).
  - Conjunto de Mandelbrot es un fractal autosimilar, generado por el conjunto de puntos estables de órbita acotada bajo cierta transformación iterativa no lineal.
  - Paisajes fractales, este tipo de fractales generados computacionalmente pueden producir paisajes realistas convincentes.
  - **Fractales de pinturas**, se utilizan para realizar el proceso de decalcomanía.

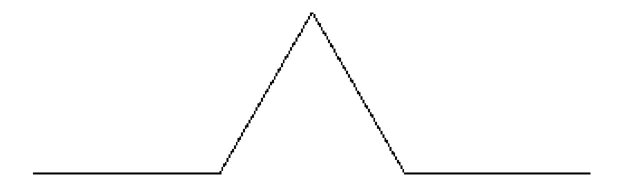
- Su dimensión de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica.
- Se define mediante un simple algoritmo recursivo.

No basta con una sola de estas características para definir un fractal. Por ejemplo, la recta real no se considera un fractal, pues a pesar de ser un objeto autosimilar carece del resto de características exigidas.

Un **fractal natural** es un elemento de la naturaleza que puede ser descrito mediante la geometría fractal. Las nubes, las montañas, el sistema circulatorio, las líneas costeras[3] o los copos de nieve son fractales naturales. Esta representación es aproximada, pues las propiedades atribuidas a los objetos fractales ideales, como el detalle infinito, tienen límites en el mundo natural.

3.1.1 Los ejemplos clásicos

Para encontrar los primeros ejemplos de fractales debemos remontarnos a finales del siglo XIX: en 1872 apareció la función de Weierstrass, cuyo grafo hoy en día consideraríamos fractal, como ejemplo de función continua pero no diferenciable en ningún punto.



Sucesivos pasos de la construcción de la Curva de Koch

Posteriormente aparecieron ejemplos con propiedades similares pero una definición más geométrica. Dichos ejemplos podían construirse partiendo de una figura inicial (semilla), a la que se aplicaban una serie de construcciones geométricas sencillas. La serie de figuras obtenidas se aproximaba a una figura límite que correspondía a lo que hoy llamamos conjunto fractal. Así, en 1904, Helge von Koch definió una curva con propiedades similares a la de Weierstrass: el copo de nieve de Koch. En 1915, Waclaw Sierpinski construyó su triángulo y, un año después, su alfombra.

Estos conjuntos mostraban las limitaciones del análisis clásico, pero eran vistos como objetos artificiales, una "galería de monstruos", como los denominó Poincaré. Pocos matemáticos vieron la necesidad de estudiar estos objetos en sí mismos.[4]

En 1919 surge una herramienta básica en la descripción y medida de estos conjuntos: la dimensión de Hausdorff-Besicovitch.

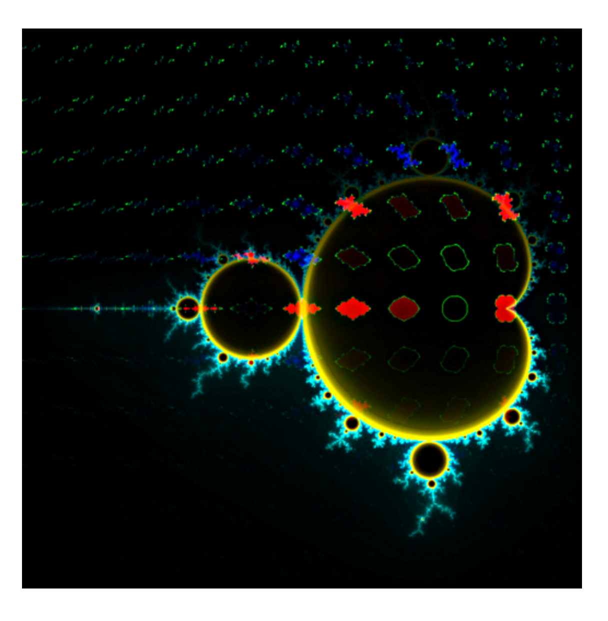
3.1.2 Los conjuntos de Julia

Estos conjuntos, fruto de los trabajos de Pierre Fatou y Gaston Julia en los años 1920, surgen como resultado de la aplicación reiterada de funciones holomorfas $z \mapsto f(z) \mapsto f(f(z)) \mapsto \ldots$.

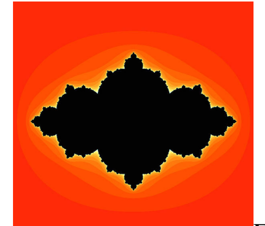
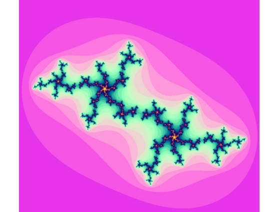
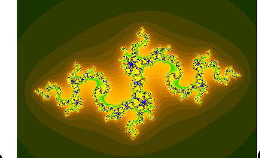
Analicemos el caso particular de funciones polinómicas de grado mayor que uno. Al aplicar sucesivas veces una función polinómica es muy posible que el resultado tienda a ∞ . Al conjunto de valores de $z \in C$ que no escapan al infinito mediante esta operación se le denomina conjunto de Julia relleno, y a su frontera, simplemente conjunto de Julia.

Estos conjuntos se representan mediante un algoritmo de tiempo de escape, en que cada pixel se colorea según el número de iteraciones necesarias para escapar. Suele usarse un color especial, a menudo el negro, para representar los puntos que no han escapado tras un número grande y prefijado de iteraciones.

Ejemplos de conjuntos de Julia para $f_c(z) = z^2 + c$



En negro, imagen del Conjunto de Mandelbrot superpuesto con los conjuntos de Julia rellenos representados por algunos de sus puntos (en rojo los conjuntos de Julia conexos y en azul los no conexos).

- En negro, conjunto de Julia relleno asociado a f_c, c=φ−1, donde φ es el número áureo
- Conjunto de Julia relleno asociado a f_c, c=(φ−2)+(φ−1)i =−0.382+0.618i
- Conjunto de Julia relleno asociado a f_c, c=−0.835-0.2321i

3.1.3 Familias de fractales: el conjunto de Mandelbrot

La familia de conjuntos de Julia $\{f_c\}$, asociadas a la reiteración de funciones de la forma $f_c(z) = z^2 + c$ presenta conjuntos de una variedad sorprendente.

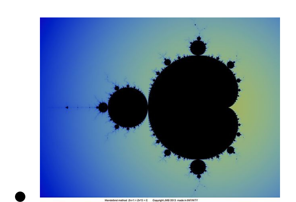
Dicha familia tendrá especial relevancia al quedar parametrizada en un mapa de fractales, popularizado en los años 1980, llamado conjunto de Mandelbrot. Este conjunto M representa un mapa en que cada pixel, correspondiente a un valor del parámetro $c \in \mathbb{C}$, se colorea de modo que refleje una propiedad básica del conjunto de Julia asociado a f_c . En concreto, $c \in M$ si el conjunto de Julia asociado a f_c es conexo.

Iterando funciones de forma alternativa se generan los fractales oscilantes.

3.1.4 El método de Mandelbrot: diferentes fractales iterando potencias de Z

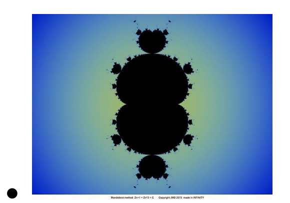
A continuación se muestra una serie de fractales de las diferentes potencias de $\mathbf{Z = Z^m + C}$, según el método de Mandelbrot. Todos los puntos del plano complejo C=(Cx,iCy) son iterados por adición a la función correspondiente. Todas las iteraciones parten de los puntos x=0 iy=0. Cuando la iteración converge se colorea de amarillo pálido. La divergencia a infinito es coloreada mediante un patrón cromático desde el negro al azul. El fractal derivado de la función $\mathbf{Z = Z^2 + C}$ se denomina conjunto de Mandelbrot.

Ejemplos de fractales del tipo Mandelbrot Z = Z^m + C

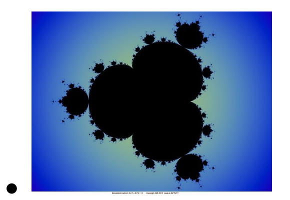
- 

  Z = Z^2 + C

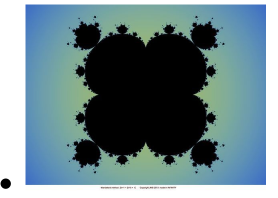
  Conjunto de Mandelbrot

- 

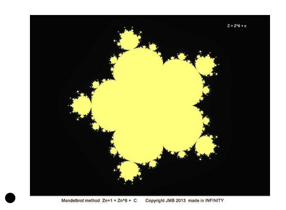
  Z = Z^3 + C

- 

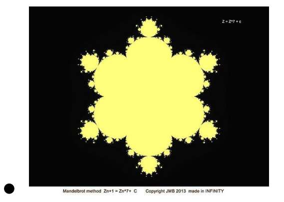
  Z = Z^4 + C

- 

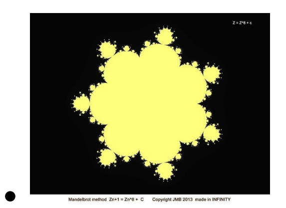
  Z = Z^5 + C

- 

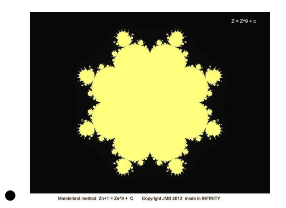
  Z = Z^6 + C

- 

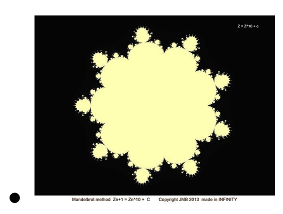
  Z = Z^7 + C

- 

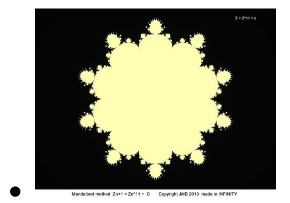
  Z = Z^8 + C

- 

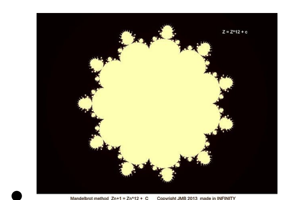
  Z = Z^9 + C

- 

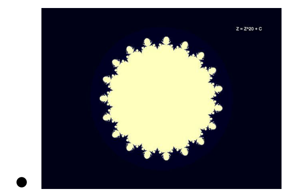
$Z = Z^{10} + C$

- 

$Z = Z^{11} + C$

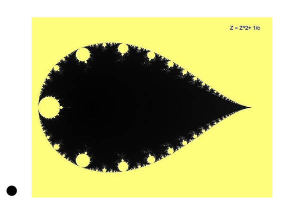
- 

$Z = Z^{12} + C$

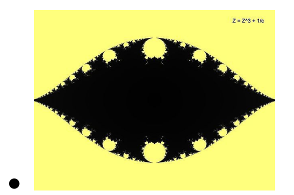
- 

$Z = Z^{20} + C$

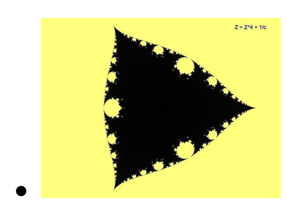
Ejemplos de fractales del tipo Mandelbrot $Z = Z^m + 1/C$

- 

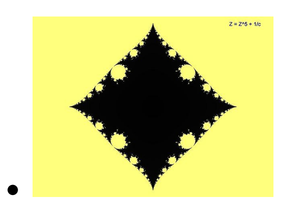
$Z=Z^2 + 1/C$

- 

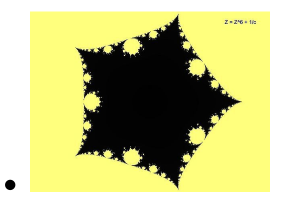
$Z=Z^3 + 1/C$

- 

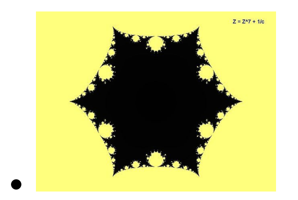
$Z=Z^4 + 1/C$

- 

$Z=Z^5 + 1/C$

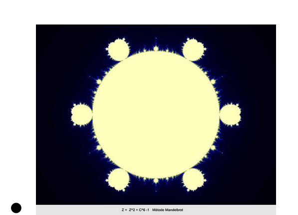
- 

$Z=Z^6 + 1/C$

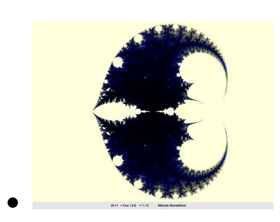
- 

$Z=Z^7 + 1/C$

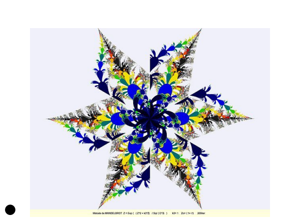
Más fractales según el método de Mandelbrot.

- 

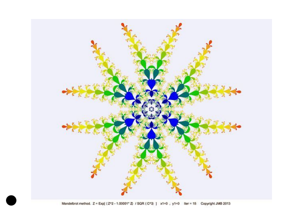
$Z = Z^2+C^6 - 1$
Zo = (0,0i)

- 

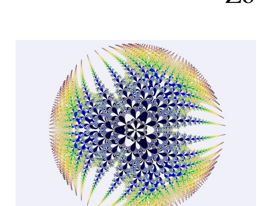
Z = Cos(Z)+ 1/C
Zo = (0,0i)

- 

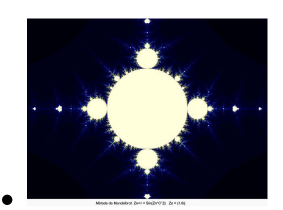
$Z = Exp[(Z^2+Z)/Sqr(C^3)]$
Zo = (1,1i)

- 

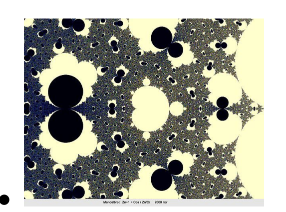
Z = Exp[($Z^2 - 1.00001$*Z)/Sqr(C^3)]
Zo = (0,0i)

- 

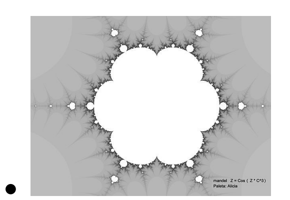
Z = Exp[(Z^2- 1.00001*Z)/C^3]
Zo = (0,0i)

- 

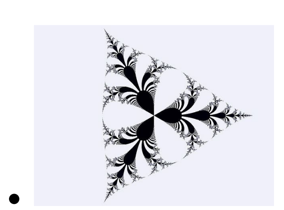
Z = Sin(Z*C^2)
Zo = (1,0i)

- 

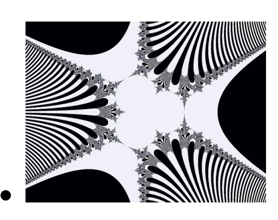
Z = Cos(Z/C)
Zo = (0,0i)

- 

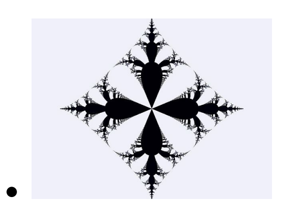
Z = Cos(Z*C^3)
Zo = (0,0i)

- 

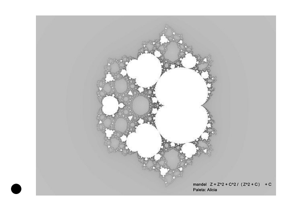
Z = Exp(Z^3/C^3)
Zo = (0,0i)

- 

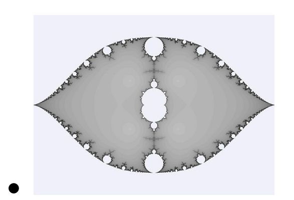
Z = Exp(C^3/Z^3)
Zo = (0,0i)

- 

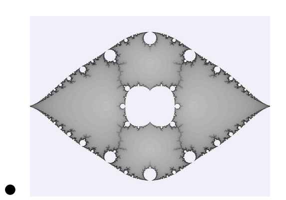
Z = Exp(Z/C^4)
Zo = (0,0i)

- 

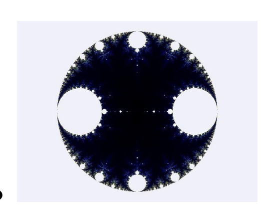
Z=Z^2 + C^2 / (Z^2+C) + C
Zo = (0,0i)

- 

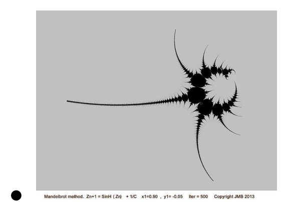
Z=Z^2 + C^2 / (C^4 + 0.1)
Zo = (0,0i)

- 

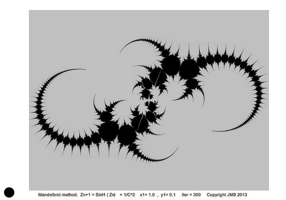
Z=Z^2 + C^2 / (C^4 - 0.25)
Zo = (0,0i)

- 

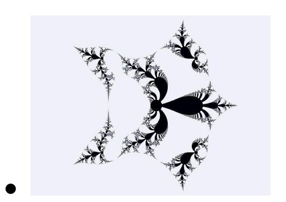
Z = SinH(Z / C)
Zo = (0,1i)

- 

Z = SinH(Z) + 1/C
Zo = (0.90, −0.05i)

- 

Z = SinH(Z) + 1/C^2
Zo = (1, 0.1i)

- 

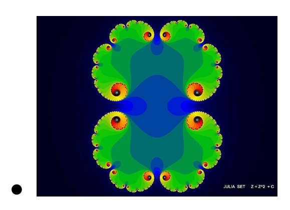
Z = Exp[Z^2 / (C^5 + C)]
Zo = (0,0i)

3.1.5 El método de Julia: diferentes fractales iterando potencias de Z

A continuación se muestra una serie de fractales de las diferentes potencias de Z = Z^m + C, según el método de Julia, por el matemático francés Gaston Julia.

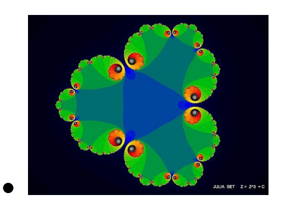
Todos los puntos del plano complejo Z=(x,iy) son iterados en la función correspondiente. A todas las iteraciones se le añade una constante arbitraria (Cx,iCy) de tal modo que la elección de la constante “semilla” determina de forma unívoca la forma y el color del fractal, una vez ha sido definido el patrón cromático. En los ejemplos mostrados a continuación se ha elegido una constante tal que solo produce divergencia, y se ha coloreado con el algoritmo de la velocidad de escape.

Ejemplos de fractales del tipo Julia Z = Z^m + C

- 

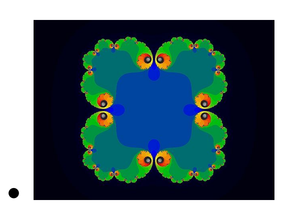
Z = Z^2 + C

Cx=0.279 Cy=0.000

- 

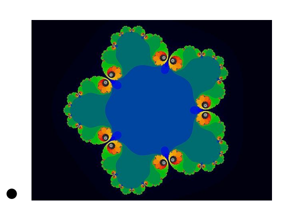
Z = Z^3 + C

Cx=0.400 Cy=0.000

- 

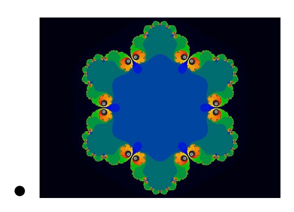
Z = Z^4 + C

Cx=0.484 Cy=0.000

- 

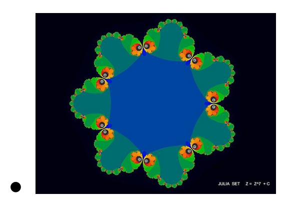
Z = Z^5 + C

Cx=0.544 Cy=0.000

- 

Z = Z^6 + C

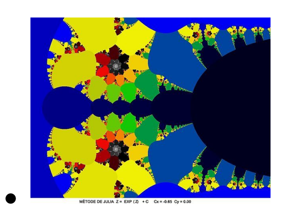
Cx=0.590 Cy=0.000

- 

Z = Z^7 + C

Cx=0.626 Cy=0.000

Ejemplos de fractales de tipo Julia, de la función exponencial: Z = Z^m + C

- 

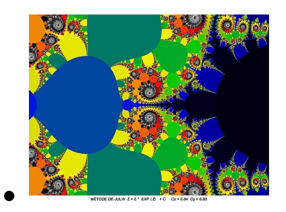
Z = Exp(Z) + C
Cx= −0.65 Cy=0.00

- 

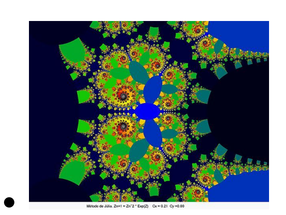
Z = Exp(Z^3) + C
Cx= −0.59 Cy=0.00

- 

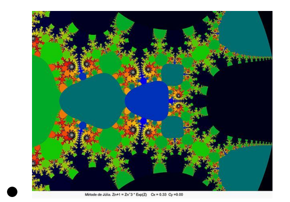
Z = Exp(Z^3) + C
Cx= −0.621 Cy=0.00
Zoom x9

- 

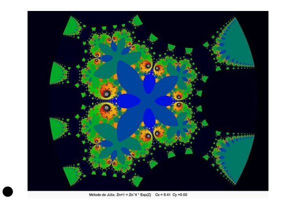
Z = Z * Exp(Z) + C
Cx= 0.04 Cy=0.00

- 

Z = Z^2 * Exp(Z) + C
Cx= 0.21 Cy=0.00

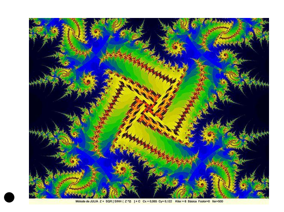
- 

Z = Z^3 * Exp(Z) + C
Cx= 0.33 Cy=0.00

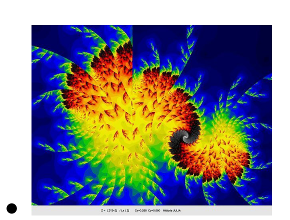
- 

Z = Z^4 * Exp(Z) + C
Cx= 0.41 Cy=0.00

Ejemplos de fractales del tipo Julia de funciones complejas.

- 

Z = Sqr[SinH(Z^2)] + C
Cx= 0.065 Cy=0.122

- 

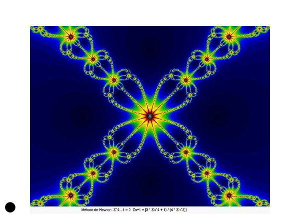
Z = [(Z^2+Z) / LN(Z)] + C
Cx= 0.268 Cy=0.060

3.1.6 El método de Newton

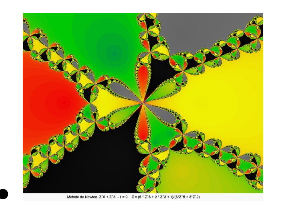
El método de Newton intenta encontrar por iteración las raíces de la función **F(Z)−1 = 0**.

Se itera la función F(Z) con cada punto del plano complejo (x + iy), siendo **Z=(x1 + iy1)** hasta la convergencia de x1 i y1, según la siguiente fórmula: $\mathbf{Z_{n+1} = Z_n - F(Z_n) / F'(Z_n)}$, en donde **F'(Z)** es la derivada. Se ha coloreado con el algoritmo de la velocidad de convergencia, conceptualmente idéntico al de la velocidad de escape, y presenta similitudes con el método de Julia.

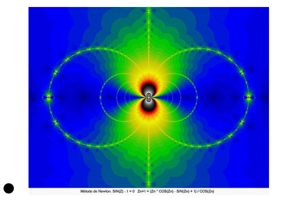
Ejemplos de fractales de tipo Newton, de algunas funciones de variable compleja:

- 

$$\mathbf{Z^4 - 1 = 0}$$
$$Z_{n+1} = [(3 * Z_n^4 + 1) / (4 * Z_n^3)]$$

- 

$$\mathbf{Z^6 + Z^3 - 1 = 0}$$

- 

SIN(Z)- 1 = 0

- 

COSH(Z)- 1 = 0

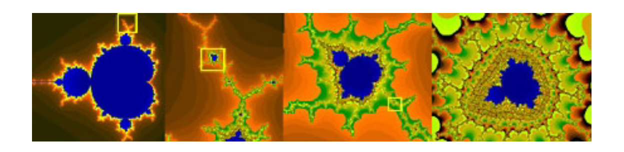
3.2 Características de un fractal

3.2.1 Autosimilitud

Según B. Mandelbrot, un objeto es **autosimilar** o **autosemejante** si sus partes tienen la misma forma o estructura que el todo, aunque pueden presentarse a diferente escala y pueden estar ligeramente deformadas.[5]

Los fractales pueden presentar tres tipos de autosimilitud:

- **Autosimilitud exacta.** este es el tipo más restrictivo de autosimilitud: exige que el fractal parezca idéntico a diferentes escalas. A menudo la encontramos en fractales definidos por sistemas de funciones iteradas (IFS).



Cuasiautosimilitud *en el conjunto de Mandelbrot: al variar la escala obtenemos copias del conjunto con pequeñas diferencias.*

- **Cuasiautosimilitud**: exige que el fractal parezca aproximadamente idéntico a diferentes escalas. Los fractales de este tipo contienen copias menores y distorsionadas de sí mismos. Matemáticamente D. Sullivan definió el concepto de conjunto cuasiautosimilar a partir del concepto de cuasi-isometría. Los fractales definidos por relaciones de recurrencia son normalmente de este tipo.

- **Autosimilitud estadística**. Es el tipo más débil de autosimilitud: se exige que el fractal tenga medidas numéricas o estadísticas que se preserven con el cambio de escala. Los fractales aleatorios son ejemplos de fractales de este tipo.

3.2.2 Dimensión fractal y dimensión de Hausdorff-Besicovitch

Entre los fractales podemos encontrar ejemplos como curvas que llenan todo el plano. En ese caso, la dimensión topológica de la curva, que es uno, no nos informa sobre la forma en que esta ocupa el espacio ambiente. De modo general, podríamos preguntarnos cómo densamente un conjunto ocupa el espacio métrico que lo contiene. Los números que nos informan objetivamente de este tipo de cuestiones son:

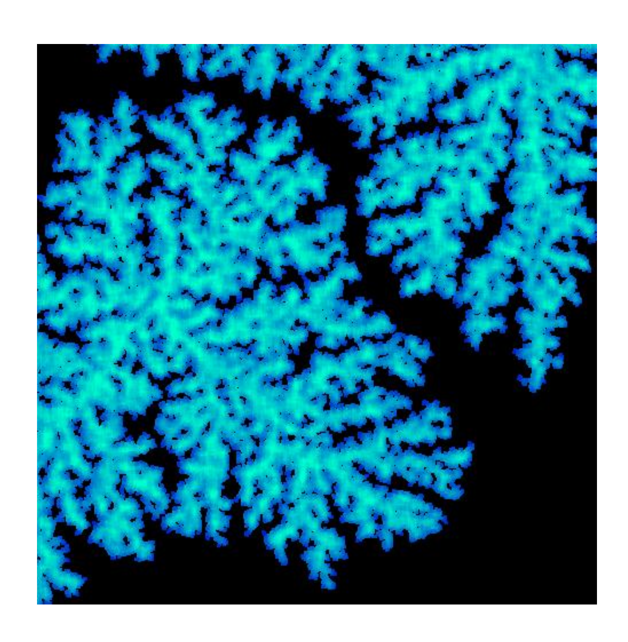
- **La dimensión fractal**. Las fórmulas que la definen tienen que ver con el recuento de las bolas necesarias para recubrir el conjunto o con el de cajas de una cuadrícula que contienen parte del conjunto, cuando las dimensiones de unas y otras tienden a cero. Podemos medir la dimensión fractal de objetos reales: líneas de la costa (1.2), nubes, árboles, etc, Con estas medidas podemos comparar objetos del mundo real con fractales generados por algoritmos matemáticos.

- **La dimensión de Hausdorff-Besicovitch**. Tiene una definición más compleja que la de dimensión fractal. Su definición no suele usarse para comparar conjuntos del mundo real.

3.2.3 Definición por algoritmos recursivos

Podemos destacar tres técnicas comunes para generar fractales:

- **Sistemas de funciones iteradas (IFS)**. Unos conjuntos se reemplazan recursivamente por su imagen bajo un sistema de aplicaciones: el conjunto de Cantor, la alfombra de Sierpinski, el triángulo de Sierpinski, la curva de Peano, la curva del dragón, el copo de nieve de Koch o la Esponja de Menger, son algunos ejemplos.



Autosimilitud estadística *de un fractal generado por el proceso de agregación limitada por difusión.*

- **Fractales de algoritmos de Escape**, definidos por una relación de recurrencia en cada punto del espacio (por ejemplo, el plano complejo): el conjunto de Mandelbrot, conjunto de Julia, y el fractal de Lyapunov.

- **Fractales aleatorios**, generados por procesos estocásticos, no deterministas: el movimiento browniano,el vuelo de Lévy, los paisajes fractales o los árboles brownianos. Estos últimos son producidos por procesos de agregación por difusión limitada..

3.3 Aspectos matemáticos

3.3.1 Intentos de definición rigurosa

El concepto de fractal no dispone en el año 2008 de una definición matemática precisa y de aceptación general. Intentos parciales de dar una definición fueron realizados por:

- B. Mandelbrot, que en 1982 definió fractal como un conjunto cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica. Él mismo reconoció que su definición no era lo suficientemente general.

- D. Sullivan, que definió matemáticamente una de las categorías de fractales con su definición de conjunto cuasiautosimilar que hacía uso del concepto de cuasi-isometría.

3.3.2 Dimensión fractal

Puede definirse en términos del mínimo número $N(\epsilon)$ de bolas de radio ϵ necesarias para recubrir el conjunto, como el límite:

$$D_F = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}$$

O en función del recuento del número de cajas N_n de una cuadrícula de anchura $1/2^n$ que intersecan al conjunto:

$$D_F = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln N_n}{\ln(2^n)}$$

Se demuestra que ambas definiciones son equivalentes, y que son invariantes bajo isometrías.[6]

3.3.3 Dimensión de Hausdorff-Besicovitch

De una definición más compleja, la dimensión de Hausdorff-Besicovitch nos proporciona un número $D_H(A)$, también invariante bajo isometrías, cuya relación con la dimensión fractal $D_F(A)$ es la siguiente:

$$0 \leq D_H(A) \leq D_F(A)$$

Esto permite distinguir en algunos casos entre conjuntos con la misma dimensión fractal.

3.3.4 Dimensión de fractales producidos por un IFS

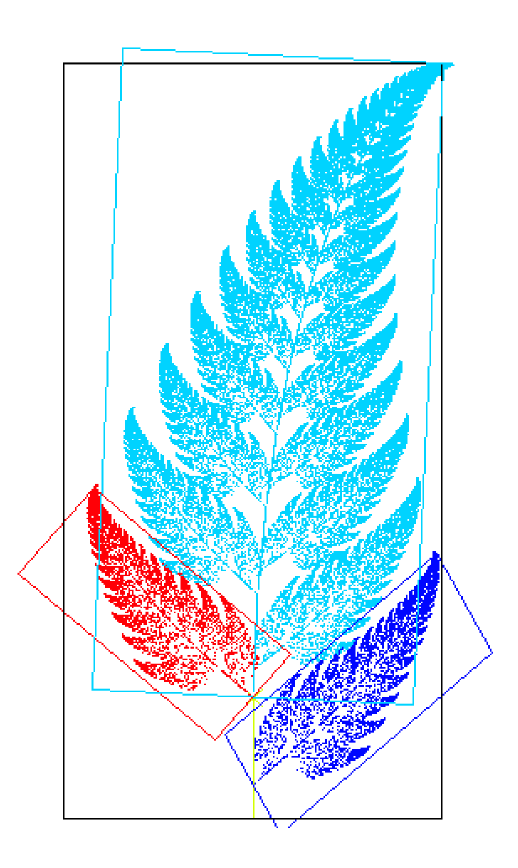
Un sistema iterativo de funciones (IFS) es un conjunto de funciones contractivas definidas sobre un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Cuando no hay solapamiento entre las imágenes de cada función, se demuestra que $D_F = D_H$ y que ambas pueden calcularse como solución de la ecuación:

$$c_1^D + c_2^D + \cdots + c_k^D = 1$$

donde c_i designa el factor de contracción de cada aplicación contractiva del IFS.

3.4 Aplicaciones

Se han utilizado técnicas de fractales en la compresión de datos y en diversas disciplinas científicas.



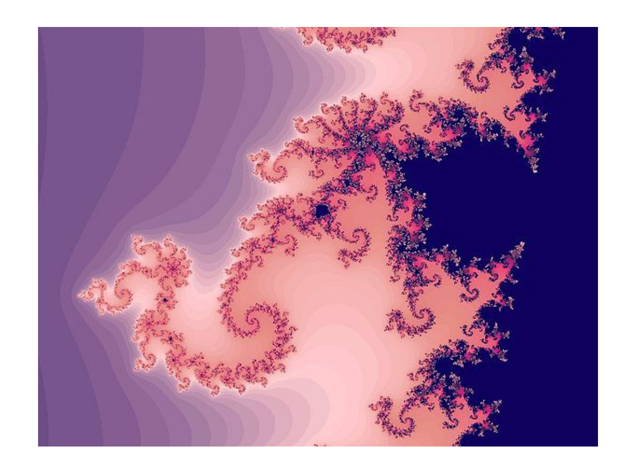
3.4.1 Compresión de imágenes

Comprimir la imagen de un objeto autosemejante como el helecho de la figura no es difícil: haciendo uso del teorema del collage, debemos encontrar un IFS, conjunto de transformaciones que lleva la figura completa (en negro) en cada una de sus partes autosemejantes (rojo, azul celeste y azul marino). La información sobre la imagen quedará codificada en el IFS, y la aplicación reiterada de dichas transformaciones permite obtener la imagen procesada en cuestión.

Pero el enfoque anterior plantea problemas con muchas imágenes reales: no esperamos, por ejemplo, que la imagen de un gato presente pequeños gatitos distorsionados sobre sí mismo. Para solventarlo, en 1989 Arnaud Jacquin creó el esquema de *sistemas de funciones iteradas particionadas*: en él se subdivide la imagen mediante una partición y para cada región resultante se busca otra región similar a la primera bajo las transformaciones apropiadas.[7]

El esquema resultante es un sistema de compresión con pérdidas, de tiempo asimétrico. Lamentablemente aún se tarda mucho en encontrar las transformaciones que definen la imagen. No obstante, una vez encontradas, la descodificación es muy rápida. La compresión, aunque dependa de muchos factores, suele ser equiparable a la compresión JPEG, con lo cual el factor tiempo resulta determinante para decantarse por uno u otro sistema.

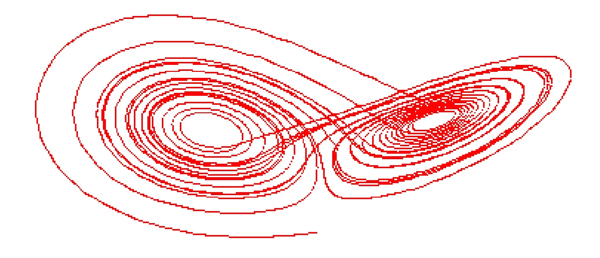
3.4.2 Modelado de formas naturales



Fracción de un fractal Mandelbrot.

Las formas fractales, las formas en la que las partes se asemejan al todo, están presentes en la materia biológica, junto con las simetrías (las formas básicas que solo necesitan la mitad de información genética) y las espirales (las formas de crecimiento y desarrollo de la forma básica hacia la ocupación de un mayor espacio), como las formas más sofisticadas en el desarrollo evolutivo de la materia biológica en cuanto que se presentan en procesos en los que se producen saltos cualitativos en las formas biológicas, es decir posibilitan catástrofes (hechos extraordinarios) que dan lugar a nuevas realidades más complejas, como las hojas que presentan una morfología similar a la pequeña rama de la que forman parte que, a su vez, presentan una forma similar a la rama, que a su vez es similar a la forma del árbol, y sin embargo cualitativamente no es lo mismo una hoja (forma biológica simple), que una rama o un árbol (forma biológica compleja).

3.4.3 Sistemas dinámicos



Un atractor extraño: el atractor de Lorenz.

Pero además las formas fractales no solo se presentan en las formas espaciales de los objetos sino que se observan en la propia dinámica evolutiva de los sistemas complejos (ver teoría del caos). Dinámica que consta de ciclos (en los que partiendo de una realidad establecida simple acaban en la creación de una nueva realidad más compleja) que a su vez forman parte de ciclos más complejos

los cuales forman parte del desarrollo de la dinámica de otro gran ciclo. Las evoluciones dinámicas de todos estos ciclos presentan las similitudes propias de los sistemas caóticos.

3.4.4 En manifestaciones artísticas

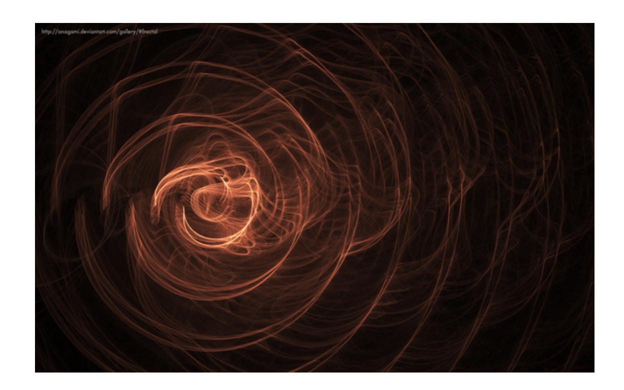


Imagen generada con el programa Apophysis.

La música puede contener formas fractales. Algunas obras clásicas de Beethoven, Bach y Mozart son ejemplos representativos según reveló un estudio.[cita requerida] El método que siguieron estos compositores, ya sea de manera intencionada o no, para integrar fractales y matemáticas era mediante una analogía entre una dimensión fractal y el número y la disposición de las diferentes notas de una obra o pieza.[cita requerida]

Se usan tanto en la composición armónica y rítmica de una melodía como en la síntesis de sonidos. Esto se debe al uso de lo que en composición se llaman “micromodos”, o pequeños grupos de tres notas, a partir de los cuales uno puede trabajarlos de manera horizontal (melódica), o vertical (armónica). A su vez, el ritmo puede ser trabajado en sucesiones temporales específicas, que son determinadas por sucesiones de fractales.

Por otra parte, las litografías del artista holandés Maurits Cornelis Escher (1898-1972) desarrollaron con frecuencia estructuras matemáticas complejas y avanzadas.

Con programas informáticos como Apophysis, Sterling o Ultra Fractal se pueden hacer imágenes con técnicas diversas; cambiando parámetros, geometría de triángulos o con transformaciones aleatorias.

3.5 Véase también

- Anexo:Fractales por dimensión de Hausdorff
- Desarrollo de fractales mediante el método de Mandelbrot
- Caos y fractales
- ¿Cuánto mide la costa de Gran Bretaña?
- Grafo simétrico
- Dimensión
- Paisaje fractal
- Recursividad
- Sistema de funciones iteradas
- Sistema-L

3.6 Referencias

[1] Benoît Mandelbrot, *La Geometría Fractal de la Naturaleza*, Tusquets, ISBN 84-8310-549-7

[2] Falconer, Kenneth (2003). *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley & Sons, Ltd. pp. XXV. ISBN 0-470-84862-6.

[3] ¿Cuánto mide la costa de Gran Bretaña?

[4] Stewart, Ian. *De aquí al infinito*. Crítica, Grijalbo Mondadori, S.A., 1998. ISBN 84-7423-853-6.

[5] B. Mandelbrot. *Los objetos fractales. Forma, azar y dimensión*. Tusquets Editores, S.A., 1993. ISBN 978-84-7223-458-1

[6] Barnsley, M. *Fractals everywhere*.Academic Press Inc, 1988. ISBN 0-12-079062-9. (Cap 5)

[7] Jacquin, A.E.;*Image coding based on a fractal theory of iterated contractive image transformations*. Image Processing, IEEE Transactions on Volume 1, Issue 1, Jan. 1992 Page(s):18 - 30

3.7 Enlaces externos

- Fractovía Información sobre fractales.
- Wikimedia Commons alberga contenido multimedia sobre **fractales**Commons.

Arte fractal

- Galerías de arte fractal en el Open directory Project
- Música fractal en el Open Directory Project
- Colecciones de Arte Fractal
- FRACTALJMB BLOG muy interesante, dónde se muestran una gran variedad de fractales.

Tutoriales

- 3 Sencillos métodos para hacer un fractal

Libros con licencia CC

- Música fractal: el sonido del caos Introducción general sobre fractales y aplicación a la composición automática de música
- Codificación fractal de imágenes Analiza la aplicación de técnicas fractales a la compresión con pérdidas de imágenes

Software

- Explorador FF Explorador interactivo de fractales freeware, para Windows
- Borlandia Applets en java que generan Fractales interactivos
- Apophysis Programa de código abierto para la creación de fractales (en inglés)
- IFS Illusions generador IFS freeware, para Windows
- FractInt generador fractal freeware, para DOS, Windows y existe un porte a Linux disponible. (en inglés)
- XaoS zoomer interactivo de fractales para linux.
- Incendia programa de diseño de fractales 3D donationware.
- WMANJUL v2 Fractal de Mandelbrot (en inglés).
- FractNep Explorador interactivo de fractales (Mandelbrot, Julia, Newton), freeware, para Windows.

Vídeos

- Vídeos de fractales en Commons
- Video Mandelbox(Ejemplo de 3D fractal)

Capítulo 4

Sistema

Un **sistema** (del latín *systēma*, y este del griego σύστημα *sýstēma* 'reunión, conjunto, agregado') es un objeto complejo cuyos componentes se relacionan con al menos algún otro componente; puede ser material o conceptual.[1] Todos los sistemas tienen composición, estructura y entorno, pero solo los sistemas materiales tienen mecanismo, y sólo algunos sistemas materiales tienen figura (forma).



Sistemas de NCR Teradata Worldmark 5100 Unix Storage.

Según el sistemismo, todos los objetos son sistemas o componentes de otro sistema.[2] Por ejemplo, un núcleo atómico es un sistema material físico compuesto de protones y neutrones relacionados por la interacción nuclear fuerte; una molécula es un sistema material químico compuesto de átomos relacionados por enlaces químicos; una célula es un sistema material biológico compuesto de orgánulos relacionados por enlaces químicos no-covalentes y rutas metabólicas; una corteza cerebral es un sistema material biológico compuesto de neuronas relacionadas por potenciales de acción y neurotransmisores; un ejército es un sistema material social y parcialmente artificial compuesto de personas y artefactos relacionados por el mando, el abastecimiento, la comunicación y la guerra; el anillo de los números enteros es un sistema conceptual algebraico compuesto de números positivos, negativos y el cero relacionados por la suma y la multiplicación; y una teoría científica es un sistema conceptual lógico compuesto de hipótesis, definiciones y teoremas relacionados por la correferencia y la deducción.

4.1 Sistemas conceptuales

Un sistema conceptual, sistema formal o sistema ideal es un constructo compuesto por conceptos de cuatro diferentes tipos:

1. Individuos, por ejemplo: $x, 1, x+1$,
2. Predicados, relatores o atributos, ejemplo: $P(\cdot), =, \in$;
3. conjuntos, por ejemplo: $\{1\}, \mathbb{N}, \varnothing$; y
4. operadores, por ejemplo: $+, \forall, \mathcal{H}$ (el hamiltoniano cuántico).

Así, los conceptos no son sistemas conceptuales, sino sólo componentes de sistemas conceptuales. Sí son sistemas conceptuales

1. Los esquemas proposicionales, por ejemplo: $P(x)$;
2. Las proposiciones, por ejemplo: $P(1)$;
3. Las estructuras algebraicas, por ejemplo: $\langle \mathbb{Z}, +, \times \rangle$; y
4. Los contextos, por ejemplo: una teoría.

4.2 Sistemas materiales

Un sistema material, sistema concreto o sistema real es una cosa compuesta (por dos o más cosas relacionadas) que posee propiedades que no poseen sus componentes, llamadas propiedades emergentes; por ejemplo, la tensión superficial es una propiedad emergente que poseen los líquidos pero que no poseen sus moléculas componentes. Al ser cosas, los sistemas materiales poseen las propiedades de las cosas, como tener energía (e intercambiarla), tener historia, yuxtaponerse con otras cosas y ocupar una posición en el espacio tiempo.

El esfuerzo por encontrar leyes generales del comportamiento de los sistemas materiales es el que funda la teoría de sistemas[3] y, más en general, el enfoque de la investigación científica a la que se alude como sistemismo, sistémica o pensamiento sistémico, en cuyo marco se encuentran disciplinas y teorías como la cibernética, la teoría de la información, la teoría del caos, la dinámica de sistemas y otras.

4.2.1 Análisis CEEM

El análisis más sencillo del concepto de sistema material es el que incluye los conceptos de composición, entorno, estructura y mecanismo (CEEM, por sus siglas). La composición de un sistema es el conjunto de sus partes componentes. El entorno o ambiente de un sistema es el conjunto de las cosas que actúan sobre los componentes del sistema, o sobre las que los componentes del sistema actúan. La estructura interna o endoestructura de un sistema es el conjunto de relaciones entre los componentes del sistema. La estructura externa o exoestructura de un sistema es el conjunto de relaciones entre los componentes del sistema y los elementos de su entorno. La estructura total de un sistema es la unión de su exoestructura y su endoestructura. Las relaciones más importantes son los vínculos o enlaces, aquellas que afectan a los componentes relacionados; las relaciones espaciotemporales no son vínculos. El mecanismo de un sistema es el conjunto de procesos internos que lo hacen cambiar algunas propiedades, mientras que conserva otras.

Además, la frontera de un sistema es el conjunto de componentes que están directamente vinculados (sin nada interpuesto) con los elementos de su entorno. La frontera de un sistema físico puede ser rígida o móvil, permeable o impermeable, conductor térmico (adiabática) o no, conductor eléctrico o no, e incluso puede ser aislante de frecuencias de audio. Además, algunos sistemas tienen figura (forma); pero no todo sistema con frontera tiene necesariamente figura. Si hay algún intercambio de materia entre un sistema físico y su entorno a través de su frontera, entonces el sistema es abierto; de lo contrario, el sistema es cerrado. Si un sistema cerrado tampoco intercambia energía, entonces el sistema es aislado. En rigor, el único sistema aislado es el universo. Si un sistema posee la organización necesaria para controlar su propio desarrollo, asegurando la continuidad de su composición y estructura (homeostasis) y la de los flujos y transformaciones con que funciona (homeorresis) —mientras las perturbaciones producidas desde su entorno no superen cierto grado—, entonces el sistema es autopoyético.

4.3 Véase también

- Dinámica de sistemas
- Teoría de conjuntos
- Sistema político

4.4 Referencias

[1] Mario Bunge, *Diccionario de filosofía*, México, Siglo XXI, 1999, p. 196.

[2] *Ibidem*, p. 200.

[3] Martín García, Juan (2017). *Teoría y ejercicios prácticos de Dinámica de Sistemas*. ISBN 9788460793045. Consultado el 18 de enero de 2017.

Capítulo 5

Sistema complejo

Un **sistema complejo** está compuesto por varias partes *interconectadas* o *entrelazadas* cuyos vínculos crean información adicional no visible antes por el observador. Como resultado de las interacciones entre elementos, surgen propiedades nuevas que no pueden explicarse a partir de las propiedades de los elementos aislados. Dichas propiedades se denominan propiedades emergentes.

En contraposición, un sistema «complicado» también está formado por varias partes pero las relaciones entre éstas no añaden información adicional. Nos basta con saber cómo funciona cada una de ellas para entender el sistema. En un **sistema complejo**, en cambio, existen variables ocultas cuyo desconocimiento nos impide analizar el sistema con precisión. Así pues, un sistema complejo, posee más información que la que da cada parte independiente. Para describir un sistema complejo hace falta no sólo conocer el funcionamiento de las partes sino conocer el funcionamiento del sistema completo una vez relacionadas sus partes entre sí.

En los últimos años ha surgido, en prácticamente todos los campos del ámbito científico, una importante transformación conceptual y metodológica relacionada estrechamente al estudio de los llamados fenómenos no-lineales, cuyo análisis se engloba, parcialmente, dentro de los llamados sistemas complejos. Como parte de esta nueva visión, se ha puesto en evidencia que diversas propiedades espacio-temporales de los sistemas complejos surgen espontáneamente a partir de interacciones de los elementos constituyentes, en escalas de tiempo y longitud considerablemente mayores que las escalas donde ocurren dichas interacciones.[1]

Estudios recientes se han enfocado en el tratamiento de modelos no lineales para comprender ecuaciones elípticas completamente no lineales, conteniendo términos de orden cero que las hacen impropias. Concretamente analizan aspectos relacionados con la existencia y la unicidad o, al contrario, infinidad de soluciones positivas.[2]

En la teoría electromagnética se analizan las ecuaciones de Maxwell para campos electromagnéticos cuasiestacionarios, el modelo puede ser analizado como una ecuación parabólica no lineal en una zona acotada del dominio correspondiente, y la ecuación de Laplace en la región exterior no acotada; ambas ecuaciones están acopladas mediante condiciones de propagación sobre la interface de interés.[3]

Una situación en la que aparece una ecuación completamente no lineal es en el juego Tug-of-War (tira y afloja). Juego de suma cero para dos jugadores, es decir, hay dos rivales y las ganancias totales de cada uno de ellos suponen las pérdidas de su oponente. Por tanto, uno de ellos, por ejemplo, el jugador I, jugará tratando de obtener el máximo beneficio mientras que el jugador II intentará minimizar el beneficio del jugador I (o, dado que el juego es de suma cero, maximizar el suyo propio). Este tipo de juegos de tira y afloja aleatorios han sido estudiados en conexión con algunos problemas de EDP (Ecuaciones en Derivadas Parciales). Pueden encontrarse otros juegos en relación con el estudio de ecuaciones degeneradas. La conexión del juego con infinito Laplaciano es mediante el Principio de Programación Dinámica del juego.[4]

5.1 Propiedades de Sistemas Complejos

Aunque no hay consenso cómo definir sistemas complejos,[5] todos ellos comparten varias propiedades claramente identificables. Estas características desafían los supuestos básicos de las teorías tradicionales (tales como agentes independientes (i.i.d.), o patrones fijos de crecimiento, etc.). Entre ellas se destaca que los sistemas complejos consisten en entes:[6]

- Conectados[7][8]
- Interdependientes[9]
- Diversos[10]
- Adaptativos[11]
- Dependientes del camino[12]
- Emergentes (no-linealidad multi-nivel)[13][14]

5.2 Ejemplos

Un ejemplo típico de sistema complejo es la Tierra. La Tierra está formada por varios sistemas que la describen:

- Campo gravitatorio.
- Campo magnético.
- Flujo térmico.
- Ondas elásticas.
- Geodinámica.
- Humanidad.

Cada uno de estos sistemas está bien estudiado, pero desconocemos la forma en que interactúan y hacen evolucionar el sistema «Tierra». Hay, pues, mucha más información oculta en esas interrelaciones de sistemas.

Otros sistemas complejos típicos son:

- El tiempo atmosférico
- La geodinámica: terremotos y volcanes
- Los ecosistemas
- Los seres vivos
- La conciencia
- Las sociedades
- Las ciudades

5.3 Véase también

- Dinámica de sistemas
- Pensamiento sistémico
- Azar
- Complejidad biológica
- Efecto mariposa
- Fractal
- Inteligencia artificial
- Problema del viajante
- Anexo:Clases de complejidad
- Sistemas dinámicos
- Teoría del caos
- Teoría de sistemas
- Cibernética

5.4 Referencias

[1] «Los sistemas complejos como instrumentos de conocimiento y transformación del mundo». Consultado el 1 de marzo de 2016.

[2] Katzourakis, Nicholas (2010). «The subelliptic ∞ -laplace system on ´ carnot-carath eodory spaces,». *arXiv:1303.0240v2 [math.AP] 11 Apr 2013, 1-16*.

[3] Portilheiro, Manuel (2013). «Degenerate homogeneous parabolic equations associated with the infinity-Laplacian». *Calculus of Variations and Partial Differential Equations, Vol. 46, Issue 3-4, 705-724*.

[4] Armstrong, Scott N (2012). «A FINITE DIFFERENCE APPROACH TO THE INFINITY LAPLACE EQUATION AND TUG-OF-WAR GAMES». *TRANSACTIONS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY Volume 364, Number 2, February 2012, Pages 595–636 S 0002-9947(2011)05289-X Article electronically published on September 14, 2011*.

[5] Seth Lloyd. Measures of complexity: a nonexhaustive list. IEEE Control Systems. Aug;21(4):7–8

[6] CEPAL Charlas Sobre Sistemas Complejos Sociales (CCSSCS): serie de 9 videos en línea sobre la ciencia de los sistemas complejos sociales; http://www.martinhilbert.net/CCSSCS.html

[7] 2nda CEPAL Charla Sobre Sistemas Complejos Sociales (CCSSCS): http://www.youtube.com/watch?v=oy8YxTshZhI&list=UUQbp2yA-gyew7E_tzgOI36A

[8] 7tima CEPAL Charla Sobre Sistemas Complejos Sociales (CCSSCS): http://www.youtube.com/watch?v=1abtP36Wx24&list=UUQbp2yA-gyew7E_tzgOI36A

[9] 1era CEPAL Charla Sobre Sistemas Complejos Sociales (CCSSCS): http://www.youtube.com/watch?v=c6_K_t0LLww&list=UUQbp2yA-gyew7E_tzgOI36A

[10] 6.ª CEPAL Charla Sobre Sistemas Complejos Sociales (CCSSCS): http://www.youtube.com/watch?v=e3gmGUqr4Jc&list=UUQbp2yA-gyew7E_tzgOI36A

[11] 5.ª CEPAL Charla Sobre Sistemas Complejos Sociales (CCSSCS): https://www.youtube.com/watch?v=djeLwMTE1xc&list=UUQbp2yA-gyew7E_tzgOI36A

[12] 4.ª CEPAL Charla Sobre Sistemas Complejos Sociales (CCSSCS): https://www.youtube.com/watch?v=xtjtN6m2OOo&list=UUQbp2yA-gyew7E_tzgOI36A

[13] 3era CEPAL Charla Sobre Sistemas Complejos Sociales (CCSSCS): http://www.youtube.com/watch?v=qHT4LUSOy1A&list=UUQbp2yA-gyew7E_tzgOI36A

[14] 8tava CEPAL Charla Sobre Sistemas Complejos Sociales (CCSSCS): http://www.youtube.com/watch?v=u47PgqfEOPY&list=UUQbp2yA-gyew7E_tzgOI36A

5.5 Enlaces externos

5.5.1 Libros

- Teoría y ejercicios prácticos de Dinámica de Sistemas
- Complejidad y Caos

5.5.2 Revistas

- Boletín de Dinámica de Sistemas
- Revista de Dinámica de Sistemas

5.5.3 Software

- Vensim
- Stella and iThink
- Powersim
- Consideo

5.5.4 Organizaciones

- Center for Social Complexity - George Mason University
- System Dynamics Society
- MIT System Dynamics Group
- New England Complex Systems Institute
- The Systems Thinker
- University of Bergen System Dynamics Group
- Santa Fe Institute
- Max Planck Institute for the Physics of Complex Systems

Capítulo 6

Sistema dinámico

Un **sistema dinámico** es un sistema cuyo estado evoluciona con el tiempo. Los sistemas físicos en situación no estacionaria son ejemplos de sistemas dinámicos, pero también existen modelos económicos, matemáticos y de otros tipos que son sistemas abstractos que son, además, sistemas dinámicos. El comportamiento en dicho estado se puede caracterizar determinando los límites del sistema, los elementos y sus relaciones; de esta forma se pueden elaborar modelos que buscan representar la estructura del mismo sistema.

Al definir los límites del sistema se hace, en primer lugar, una selección de aquellos componentes que contribuyan a generar los modos de comportamiento, y luego se determina el espacio donde se llevará a cabo el estudio, omitiendo toda clase de aspectos irrelevantes.

6.1 Elementos a tener en cuenta

En cuanto a la elaboración de los modelos, los elementos y sus relaciones, se debe tener en cuenta:

1. Un sistema está formado por un conjunto de elementos en interacción.
2. El comportamiento del sistema se puede mostrar a través de diagramas causales.
3. Hay varios tipos de variables: variables exógenas (son aquellas que afectan al sistema sin que este las provoque) y las variables endógenas (afectan al sistema pero este sí las provoca).

6.2 Ejemplo de sistema dinámico

Un ejemplo de un sistema dinámico se puede ver en una especie de peces que se reproduce de tal forma que este año la cantidad de peces es X_k *, el año próximo será* X_{k+1} *. De esta manera podemos poner nombres a las cantidades de peces que habrá cada año, así: año inicial* X_0 *, año primero* X_1 *,........... ......, año* k X_k .

Como se puede observar : $x_{k+1} = f(x_k)$, se cumple para cualquier año *k*; lo cual significa que la cantidad de peces se puede determinar si se sabe la cantidad del año anterior. Por consiguiente esta ecuación representa un sistema dinámico.

6.3 Tipos de sistemas dinámicos

Los sistemas dinámicos se dividen en sistemas *discretos* en el tiempo y *continuos* en el tiempo. Un sistema dinámico se dice *discreto* si el tiempo se mide en pequeños lapsos; estos son modelados como relaciones recursivas, tal como la ecuación logística:

$$x_{t+1} = ax_t(1 - x_t)$$

donde *t* denota los pasos discretos del tiempo y *x* es la variable que cambia con éste. Un sistema dinámico discreto determinista general puede modelarse mediante una ecuación abstracta del tipo:

Si el tiempo es medido en forma continua, el sistema dinámico *continuo* resultante es expresado como una ecuación diferencial ordinaria; por ejemplo:

$$\frac{dx}{dt} = ax(1 - x)$$

donde *x* es la variable que cambia con el tiempo *t*. La variable cambiante *x* es normalmente un número real, aunque también puede ser un vector en $\mathbf{R}^k$.

6.4 Sistemas lineales y no lineales

Se distingue entre *sistemas dinámicos lineales* y *sistemas dinámicos no lineales*. En los sistemas lineales, el segundo miembro de la ecuación es una expresión que depende en forma lineal de *x*, tal como:

$$x_{n+1} = 3x_n$$

Si se conocen dos soluciones para un sistema lineal, la suma de ellas es también una solución; esto se conoce

como *principio de superposición*. En general, las soluciones provenientes de un espacio vectorial permiten el uso del álgebra lineal y simplifican significativamente el análisis. Para sistemas lineales continuos, el método de la transformada de Laplace también puede ser usado para transformar la ecuación diferencial en una ecuación algebraica; así mismo que para los sistemas lineales discretos, el método de la transformada Z también puede ser usado para transformar la ecuación diferencial en una ecuación algebraica.

Los sistemas no lineales son mucho más difíciles de analizar y a menudo exhiben un fenómeno conocido como caos, con comportamientos totalmente impredecibles.

6.5 Véase también

- No linealidad
- Cibernética
- Teoría de sistemas
- Retroalimentación
- Series temporales
- Plan de negocio
- Sistema de control

6.6 Enlaces externos

- Wikimedia Commons alberga contenido multimedia sobre **Sistema dinámico**Commons.

Libros

- Teoría y ejercicios prácticos de Dinámica de Sistemas

Revistas

- Boletín de Dinámica de Sistemas
- Revista de Dinámica de Sistemas

Software

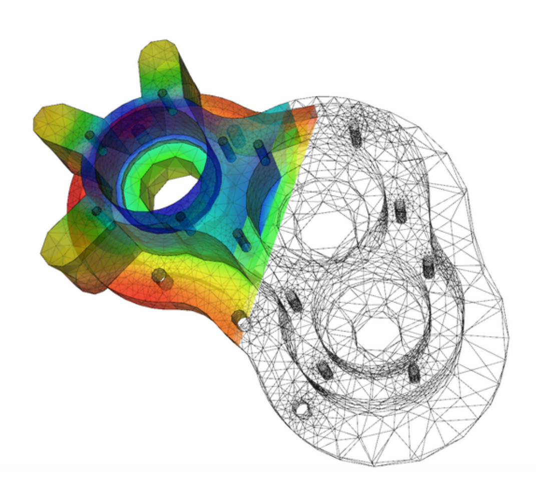
- Vensim
- AnyLogic
- Powersim Studio
- CONSIDEO
- Stella iThink
- MapSys
- Simile
- Evolución

Organizaciones

- System Dynamics Society
- MIT System Dynamics Group
- New England Complex Systems Institute
- The Systems Thinker
- University of Bergen System Dynamics Group

Capítulo 7

Ecuación diferencial



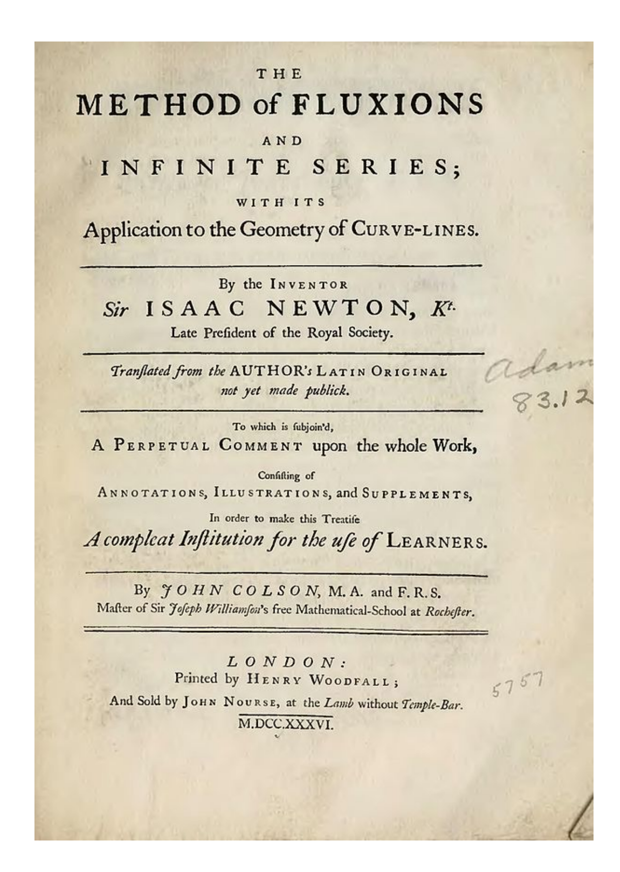
Visualización de transferencia de calor en una cámara de una bomba, creada resolviendo la ecuación de calor. El calor se genera internamente en la cámara y se enfría en los bordes, dando un estado estacionario de distribución de temperatura.

Una **ecuación diferencial** es una ecuación matemática que relaciona una función con sus derivadas. En las matemáticas aplicadas, las funciones usualmente representan cantidades físicas, las derivadas representan sus razones de cambio, y la ecuación define la relación entre ellas. Como estas relaciones son muy comunes, las ecuaciones diferenciales juegan un rol primordial en diversas disciplinas, incluyendo la ingeniería, la física, la química, la economía, y la biología.

En las matemáticas puras, las ecuaciones diferenciales se estudian desde perspectivas diferentes, la mayoría concernientes al conjunto de las soluciones de las funciones que satisfacen la ecuación. Solo las ecuaciones diferenciales más simples se pueden resolver mediante fórmulas explícitas; sin embargo, se pueden determinar algunas propiedades de las soluciones de una cierta ecuación diferencial sin hallar su forma exacta.

Si la solución exacta no puede hallarse, esta puede obtenerse numéricamente, mediante una aproximación usando computadoras. La teoría de sistemas dinámicos hace énfasis en el análisis cualitativo de los sistemas descritos por ecuaciones diferenciales, mientras que muchos métodos numéricos han sido desarrollados para determinar soluciones con cierto grado de exactitud.

7.1 Historia



THE
METHOD of FLUXIONS
AND
INFINITE SERIES;
WITH ITS
Application to the Geometry of CURVE-LINES.

By the INVENTOR
Sir ISAAC NEWTON, *Kt.*
Late Preſident of the Royal Society.

Tranſlated from the AUTHOR's LATIN ORIGINAL
not yet made publick.

To which is ſubjoin'd,
A PERPETUAL COMMENT upon the whole Work,
Conſiſting of
ANNOTATIONS, ILLUSTRATIONS, and SUPPLEMENTS,
In order to make this Treatiſe
A compleat Inſtitution for the uſe of LEARNERS.

By *JOHN COLSON*, M. A. and F. R. S.
Maſter of Sir *Joſeph Williamſon's* free Mathematical-School at *Rocheſter.*

LONDON:
Printed by HENRY WOODFALL;
And Sold by JOHN NOURSE, at the *Lamb* without *Temple-Bar.*
M.DCC.XXXVI.

Tapa del Método de las fluxiones y series infinitas, obra que fue publicada en 1736, a pesar de que Newton la había terminado en 1671.

Las ecuaciones diferenciales aparecieron por primera vez en los trabajos de cálculo de Newton y Leibniz. En 1671, el Capítulo 2 de su trabajo *Método de las fluxiones y series infinitas*,[1] Isaac Newton hizo una lista de tres clases de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

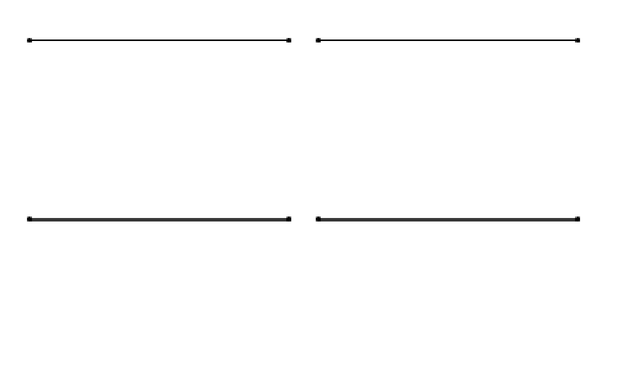
$$x_1\frac{\partial y}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial y}{\partial x_2} = y$$

Resolvió estas ecuaciones y otras usando series infinitas y discutió la no unicidad de las soluciones.

Jakob Bernoulli propuso la ecuación diferencial de Bernoulli en 1695.[2] Esta es una ecuación diferencial ordinaria de la forma

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

para la que luego, en los siguientes años, Leibniz obtuvo sus soluciones mediante simplificaciones.[3]



Ondas estacionarias en una cuerda vibrante. Se observa el modo fundamental y los primeros cinco sobretonos de la serie armónica.

Históricamente, el problema de una cuerda vibrante tal como la de un instrumento musical, fue estudiado por Jean le Rond d'Alembert, Leonhard Euler, Daniel Bernoulli, y Joseph-Louis Lagrange.[4][5] [6] [7] [8] En 1746, d'Alembert descubrió la ecuación de onda unidimensional, y al cabo de diez años Euler descubrió la ecuación de onda tridimensional.[9]

Las ecuaciones de Euler-Lagrange fueron desarrolladas en la década de 1750 por Euler y Lagrange en relación con sus estudios del problema de la tautócrona. Este es el problema de determinar una curva en la cual una partícula con peso caerá en un punto fijo en cierta cantidad fija de tiempo, independiente del punto de partida.

Lagrange resolvió este problema en 1755 y envió la solución a Euler. Ambos desarrollaron el método de Lagrange y lo aplicaron a la mecánica, lo que los condujo a la mecánica Lagrangiana.

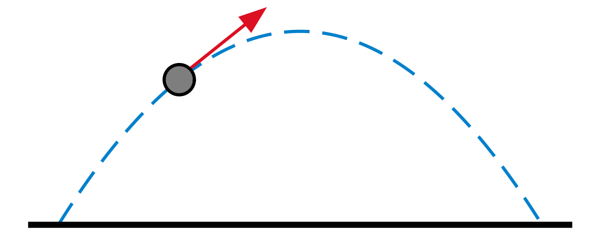
En 1822 Fourier publicó su trabajo de transferencia de calor en *Théorie analytique de la chaleur* (Teoría analítica del calor),[10] en la que basó su razonamiento en la ley del enfriamiento de Newton, esto es, que la transferencia de calor entre dos moléculas adyacentes es proporcional a diferencias extremadamente pequeñas de sus temperaturas. En este libro Fourier expone la ecuación del calor para la difusión conductiva del calor. Esta ecuación en derivadas parciales es actualmente objeto de estudio en la física matemática.

Las ecuaciones diferenciales estocásticas, que amplían tanto la teoría de las ecuaciones diferenciales como la teoría de la probabilidad, fueron introducidas con un tratamiento riguroso por Kiyoshi Itō y Ruslán Stratónovich durante los años 1940 y 1950.

7.2 Tipos

Las ecuaciones diferenciales pueden dividirse en varios tipos. Aparte de describir las propiedades de la ecuación en si, las clases de las ecuaciones diferenciales pueden ayudar a buscar la elección de la aproximación a una solución. Es muy común que estas distinciones incluyan si la ecuación es: Ordinaria/Derivadas Parciales, Lineal/No lineal, y Homogénea/Inhomogénea. Esta lista es demasiado grande; hay muchas otras propiedades y subclases de ecuaciones diferenciales las cuales pueden ser muy útiles en contextos específicos.

7.2.1 Ecuaciones diferenciales ordinarias

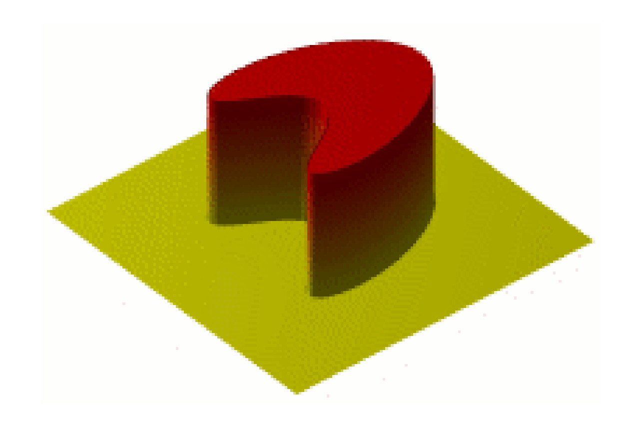


La trayectoria de un proyectil lanzado desde un cañón sigue una curva definida por una ecuación diferencial ordinaria que se obtiene a partir de la segunda ley de Newton.

Una ecuación diferencial ordinaria (*EDO*) es una ecuación que contiene una función de una variable independiente y sus derivadas. El término "*ordinaria*" se usa en contraste con la ecuación en derivadas parciales la cual puede ser respecto a *más de* una variable independiente.

Las ecuaciones diferenciales lineales, las cuales tienen soluciones que pueden sumarse y ser multiplicadas por coeficientes, están bien definidas y comprendidas, y tienen soluciones exactas que pueden hallarse. En contraste, las EDOs cuyas soluciones no pueden sumarse son no lineales, y su solución es más intrincada, y muy pocas veces pueden hallarse en forma exacta de funciones elementales: las soluciones suelen obtenerse en forma de series o forma integral. Los métodos numéricos y gráficos para EDOs, pueden realizarse manualmente o mediante computadoras, se pueden aproximar las soluciones de las EDOs y su resultado puede ser muy útil, muchas veces suficientes como para prescindir de la solución exacta y analítica.

7.2.2 Ecuación en derivadas parciales



Variación del perfil de temperaturas solución de la ecuación del calor en un problema bidimensional.

Una ecuación en derivadas parciales (*EDP*) es una ecuación diferencial que contiene una función multivariable y sus derivadas parciales. Estas ecuaciones se utilizan para formular problemas que involucran funciones de varias variables, y pueden resolverse manualmente, para crear una simulación por computadora.

Las EDPs se pueden usar para describir una amplia variedad de fenómenos tal como el sonido, el calor, la electroestática, la electrodinámica, la fluidodinámica, la elasticidad, o la mecánica cuántica. Estos distintos fenómenos físicos se pueden formalizar en términos de EDPs. Con ecuaciones diferenciales ordinarias es muy común realizar modelos unidimensionales de sistemas dinámicos, y las ecuaciones diferenciales parciales se pueden utilizar para modelos de sistemas multidimensionales. Las EDPs tienen una generalización en las ecuaciones en derivadas parciales estocásticas.

7.2.3 Ecuaciones diferenciales lineales

Una ecuación diferencial es *lineal* cuando sus soluciones pueden obtenerse a partir de combinaciones lineales de otras soluciones. Si es lineal, la ecuación diferencial tiene sus derivadas con máxima potencia de 1 y no existen términos en donde haya productos entre la función desconocida y/o sus derivadas. La propiedad característica de las ecuaciones lineales es que sus soluciones tienen la forma de un subespacio afín de un espacio de soluciones apropiados, cuyo resultado se desarrolla en la teoría de ecuaciones diferenciales lineales.

Las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas son una subclase de las ecuaciones diferenciales lineales para la cual el espacio de soluciones es un subespacio lineal, es decir, la suma de cualquier conjunto de soluciones o múltiplos de soluciones, es también una solución. Los coeficientes de la función desconocida, y sus derivadas en una ecuación diferencial lineal pueden ser funciones de la variable o variables independientes, si estos coeficientes son constantes, entonces se habla de *ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes constantes*.

Se dice que una ecuación es lineal si tiene la forma:

Es decir:

1. Ni la función ni sus derivadas están elevadas a ninguna potencia distinta de uno o cero.
2. En cada coeficiente que aparece multiplicándolas sólo interviene la variable independiente.
3. Una combinación lineal de sus soluciones es también solución de la ecuación.

Ejemplos:

- $y' - y = 0$ es una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden, tiene como soluciones $y = f(x) = k \cdot e^x$, con k un número real cualquiera.
- $y'' + y = 0$ es una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden, tiene como soluciones $y = f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$, con a y b reales.
- $y'' - y = 0$ es una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden, tiene como soluciones $a \cdot e^x + b \cdot 1/(e^x)$, con a y b reales.

7.2.4 Ecuaciones diferenciales no lineales

Existen muy pocos métodos para resolver ecuaciones diferenciales no lineales en forma exacta; aquellas de se conocen es muy común que dependan de la ecuación teniendo simetrías particulares. Las ecuaciones diferenciales no lineales pueden exhibir un comportamiento muy complicado en intervalos grandes de tiempo, característica del caos. Cada una de las cuestiones fundamentales de la existencia, unicidad, y extendibilidad de las soluciones para ecuaciones diferenciales no lineales, y el problema bien definido de los problemas de condiciones iniciales y de controno para EDPs no lineales son problemas difíciles y su resolución en casos especiales se considera que es un avance significativo en la teoría matemática (por ejemplo la existencia y suavidad de Navier-Stokes). Sin embargo, si la ecuación diferencial es una representación de un proceso físico significativo formulado correctamente, entonces se espera tener una solución. [11]

Ecuaciones diferenciales lineales suelen aparecer por medio de aproximaciones a ecuaciones lineales. Estas aproximaciones son válidas únicamente bajo condiciones restringidas. Por ejemplo, la ecuación del oscilador armónico es una aproximación de la ecuación no lineal de un péndulo que es válida para pequeñas amplitudes de oscilación (ver más adelante).

7.2.5 Ecuaciones semilineales y cuasilineales

No existe un procedimiento general para resolver ecuaciones diferenciales no lineales. Sin embargo, algunos casos particulares de no linealidad sí pueden ser resueltos. Son de interés el caso semilineal y el caso cuasilineal.

Una ecuación diferencial ordinaria de orden *n* se llama cuasilineal si es "lineal" en la derivada de orden *n*. Más específicamente, si la ecuación diferencial ordinaria para la función $y(x)$ puede escribirse en la forma:

$$f(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y'', y', y, x) = 0, \qquad f_1(z) := f(z, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0, \beta_0)$$

Se dice que dicha ecuación es cuasilineal si $f_1(\cdot)$ es una función afín, es decir, $f_1(z) = az + b$.

Una ecuación diferencial ordinaria de orden *n* se llama semilineal si puede escribirse como suma de una función "lineal" de la derivada de orden *n* más una función cualquiera del resto de derivadas. Formalmente, si la ecuación diferencial ordinaria para la función $y(x)$ puede escribirse en la forma:

$$f(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y'', y', y, x) = \hat{f}(y^{(n)}, x) + g(y^{(n-1)}, \dots, y', y, x) \qquad f_2(z) := \hat{f}(z, \beta_0)$$

Se dice que dicha ecuación es semilineal si $f_2(\cdot)$ es una función lineal.

7.2.6 Orden de la ecuación

Las ecuaciones diferenciales se describen por su orden, determinado por el término con derivadas de mayor orden. Una ecuación que contiene solo derivadas simples es una *ecuación diferencial de primer orden*, una ecuación que contiene hasta derivadas segundas es una *ecuación diferencial de segundo orden*, y así sucesivamente.[12][13]

Ejemplos de orden en ecuaciones:

- Ecuación diferencial de primer orden: $y' + y(x) = f(x)$
- Ecuación diferencial de segundo orden: $y'' + 4y = 0$
- Ecuación diferencial de tercer orden: $xy''' - 2xy'' + 4y' = 0$

7.2.7 Grado de la ecuación

Es la potencia de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación, siempre y cuando la ecuación esté en forma polinómica, de no ser así se considera que no tiene grado.

7.2.8 Ejemplos

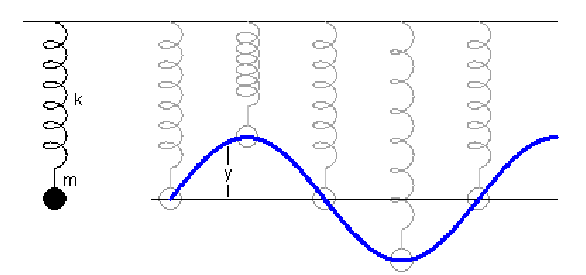
En el primer grupo de ejemplos, sea *u* una función desconocida que depende de *x*, y *c* y *ω* son constantes conocidas. Observar que tanto las ecuaciones diferenciales ordinarias como parciales pueden clasificarse como *lineales* y *no lineales*.

- Ecuación diferencial ordinaria lineal a coeficientes constantes de primer orden:

$$\frac{du}{dx} = cu + x^2.$$

- Ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea de segundo orden:

$$\frac{d^2u}{dx^2} - x\frac{du}{dx} + u = 0.$$



La masa colgada del resorte forma un oscilador armónico, una ecuación diferencial permite expresar las relaciones que debe obedecer el movimiento de la masa.

- Ecuación diferencial ordinaria lineal a coeficientes constantes homogénea de segundo orden que describe un oscilador armónico:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \omega^2 u = 0.$$

- Ecuación diferencial ordinaria no lineal inhomogénea de primer orden:

$$\frac{du}{dx} = u^2 + 4.$$

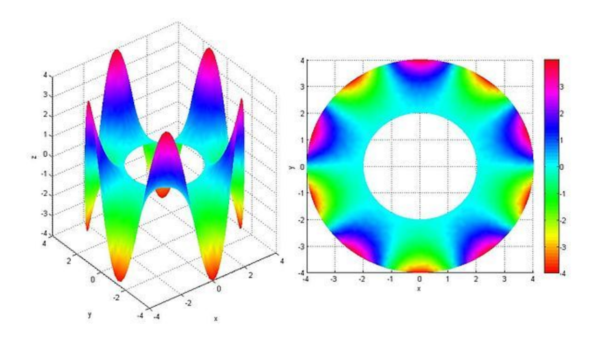
- Ecuación diferencial ordinaria no lineal (debido a la función seno) de segundo orden, que describe el movimiento de un péndulo de longitud *L*:

$$L\frac{d^2u}{dx^2} + g\sin u = 0.$$

En el siguiente grupo de ejemplos, la función desconocida *u* depende de dos variables *x* y *t* o *x* e *y*.

- Ecuación en derivadas parciales lineal homogénea de primer orden, entonces:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + t\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$



*Ecuación de Laplace sobre una corona (r=2 y R=4) con condiciones de contorno de Dirichlet: u(r=2)=0 y u(r=4)=4sin(5*θ).*

- Ecuación en derivadas parciales lineal homogénea a coeficientes constantes de segundo orden del tipo elíptico, la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

- Ecuación en derivadas parciales no lineal de tercer orden, la ecuación de Korteweg-de Vries:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 6u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}.$$

7.3 Solución de una ecuación diferencial

7.3.1 Existencia de soluciones

La resolución de ecuaciones diferenciales no es como aquellas resoluciones de las ecuaciones algebraicas. Puesto que a pesar de que en ocasiones sus soluciones son poco claras, también puede ser de interés si estas son únicas o existen.

Para problemas de primer orden con valores iniciales, el teorema de existencia de Peano nos da un conjunto de condiciones en la cual la solución existe. Para cualquier punto dado (a, b) en el plano *xy*, y definida una región rectangular Z , tal que $Z = [l, m] \times [n, p]$ y (a, b) está en el interior de Z . Si tenemos una ecuación diferencial $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x, y)$ y la condición que $y = b$ cuando $x = a$, entonces hay una solución local a este problema si $g(x, y)$ y $\frac{\partial g}{\partial x}$ son ambas continuas en Z . La solución existe en algún intervalo con su centro en a . La solución puede no ser única. (Ver Ecuación diferencial ordinaria para otros resultados.)

Sin embargo, esto solo nos ayuda con problemas de primer orden con condiciones iniciales. supongamos que tenemos un problema lineal con condiciones iniciales de orden enésimo:

$$f_n(x)\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + \cdots + f_1(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + f_0(x)y = g(x)$$

tal que

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, y''(x_0) = y''_0, \cdots$$

Para cualquier $f_n(x)$ no nulo, si $\{f_0, f_1, \cdots\}$ y g son continuos sobre algún intervalo conteniendo x_0 , y es único y existe.[14]

7.3.2 Tipos de soluciones

Una solución de una ecuación diferencial es una función que al reemplazar a la función incógnita, en cada caso con las derivaciones correspondientes, verifica la ecuación, es decir, la convierte en una identidad. Hay tres tipos de soluciones:

Solución general

La solución general es una solución de tipo genérico, expresada con una o más constantes. Es un haz de curvas. Tiene un orden de infinitud de acuerdo a su cantidad de constantes (una constante corresponde a una familia simplemente infinita, dos constantes a una familia doblemente infinita, etc). En caso de que la ecuación sea lineal, la solución general se logra como combinación lineal de las soluciones (tantas como el orden de la ecuación) de la ecuación homogénea (que resulta de hacer el término no dependiente de $y(x)$ ni de sus derivadas igual a 0) más una solución particular de la ecuación completa.

Solución particular

Si fijando cualquier punto $P(X_0, Y_0)$ por donde debe pasar necesariamente la solución de la ecuación diferencial, existe un único valor de C, y por lo tanto de la curva integral que satisface la ecuación, éste recibirá el nombre de solución particular de la ecuación en el punto $P(X_0, Y_0)$, que recibe el nombre de condición inicial.

Es un caso particular de la solución general, en donde la constante (o constantes) recibe un valor específico.

Solución singular

La solución singular es una función que verifica la ecuación, pero que no se obtiene particularizando la solución general. Es solución de la ecuación no consistente en una particular de la general.

7.3.3 Observaciones sobre las soluciones

Sea la ecuación diferencial ordinaria de orden n $f(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots, y'', y', y, x) = 0$, es fácil verificar que la función *y= f(x)* es su solución. Basta calcular sus derivadas de f(x), luego reemplazarlas en la ecuación , junto con f(x) y probar que se obtiene una identidad en x.

Las soluciones de E.D.O. se presentan en forma de funciones implícitamente definidas, y a veces imposibles de expresar de manera explícita. Por ejemplo[15]

$xy = \log y + c$, que es solución de: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2}{1-xy}$

La más simple de todas las ecuación es $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = f(x)$ cuya solución es $y = \int f(x)\, \mathrm{d}x + c$ En algunos casos es posible resolver por métodos elementales del cálculo. Sin embargo, en otros casos, la solución analítica requiere técnicas de variable compleja o más sofisticadas como sucede con las integrales:

$y = \int \exp(x^2)\, \mathrm{d}x$ y en la integral $y = \int \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x$

no puede estructurase mediante un número finito de funciones elementales.[15]

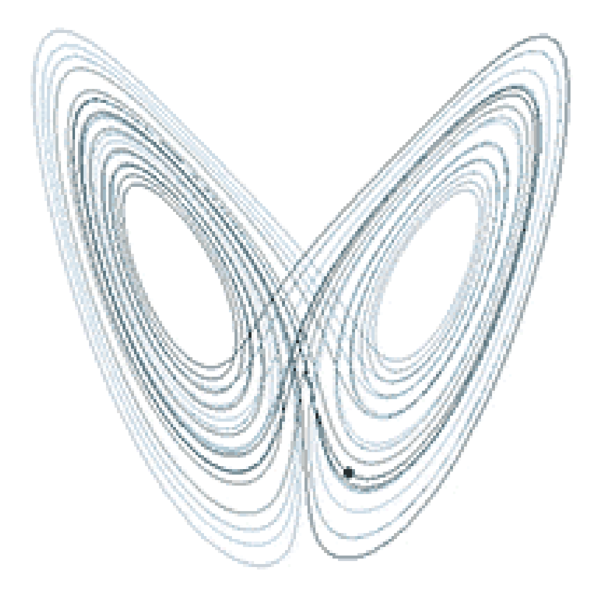
7.4 Aplicaciones

El estudio de ecuaciones diferenciales es un campo extenso en matemáticas puras y aplicadas, en física y en la ingeniería. Todas estas disciplinas se interesan en las propiedades de ecuaciones diferenciales de varios tipos. Las matemáticas puras se focalizan en la existencia y unicidad de las soluciones, mientras que las matemáticas aplicadas enfatiza la justificación rigurosa de los métodos de aproximación de las soluciones. Las ecuaciones diferenciales juegan un rol muy importante en el modelado virtual de cualquier proceso físico, técnico, o biológico, por ejemplo, tanto el movimiento celeste, como el diseño de un puente, o la interacción entre neuronas. Las ecuaciones diferenciales que se plantean para resolver problemas de la vida real, no necesariamente son resolubles directamente, es decir, sus soluciones no tienen una expresión en forma cerrada. Cuando sucede esto, las soluciones se pueden aproximar usando métodos numéricos

Muchas leyes de la física y la química se formalizan con ecuaciones diferenciales. En biología y economía, las ecuaciones diferenciales se utilizan para el modelado del comportamiento de sistemas complejos. La teoría matemática de las ecuaciones diferenciales se desarrolló inicialmente con las ciencias donde las ecuaciones se originaban y donde se encontraban resultados para las aplicaciones. Sin embargo, algunas veces se originaban problemas diversos en campos científicos distintos, de los cuales resultaban ecuaciones diferenciales idénticas. Esto sucedía porque, detrás de la teoría matemática de las ecuaciones, puede verse un principio unificado detrás de los fenómenos. Como por ejemplo, si se considera la propagación de la luz y el sonido en la atmósfera, y de las ondas sobre la superficie de un estanque. Todos estos fenómenos pueden describirse con la misma ecuación en derivadas parciales de segundo orden, la ecuación de onda, la cual nos permite pensar a la luz y al sonido como formas de onda, y en forma similar a las ondas en el agua. La conducción de calor, la teoría que fue desarrollada por Joseph Fourier, está gobernada por otra ecuación en derivadas parciales de segundo orden, la ecuación de calor. Resulta que muchos procesos de difusión, aunque aparentan ser diferentes, están descritos por la misma ecuación. La ecuación de Black-Scholes en las finanzas, está por ejemplo, relacionada con la ecuación del calor.

7.4.1 Física

- Ecuaciones de Euler-Lagrange en mecánica clásica
- Ecuaciones de Hamilton en mecánica clásica
- Radiactividad en física nuclear
- Ley de enfriamiento de Newton en termodinámica
- Ecuación de onda
- Ecuación de calor en termodinámica
- Ecuación de Laplace, que define las funciones armónicas
- Ecuación de Poisson
- Ecuación geodésica



Un ejemplo de solución para las ecuaciones en un atractor de Lorenz para el caso $\varrho = 28$, $\sigma = 10$, y $\beta = 8/3$.

- Ecuaciones de Navier-Stokes en fluidodinámica
- Ecuación de difusión en procesos estocásticos
- Ecuación de convección-difusión en fluidodinámica
- Ecuaciones de Cauchy-Riemann en análisis complejo
- Ecuación de Poisson-Boltzmann en dinámica molecular
- Ecuaciones de Saint-Venant
- Ecuación diferencial universal
- Ecuaciones de Lorenz cuyas soluciones exhiben un flujo caótico.

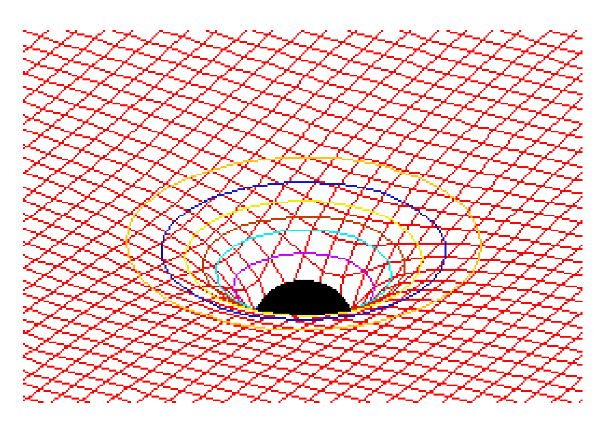
Mecánica clásica

Siempre que se conozca la fuerza actuante sobre una partícula, la Segunda ley de Newton es suficiente para describir el movimiento de una partícula. Una vez que están disponibles las relaciones independientes para cada fuerza que actúa sobre una partícula, se pueden sustituir en la segunda ley de Newton para obtener una ecuación diferencial ordinaria, la cual se denomina *ecuación de movimiento*.

Electrodinámica

Las ecuaciones de Maxwell son un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales que, junto con la ley de la fuerza de Lorentz , forman los fundamentos de la electrodinámica clásica, óptica clásica, y la teoría de los circuitos eléctricos. Estos campos se volvieron fundamentales en las tecnologías eléctricas, electrónicas y de comunicaciones. Las ecuaciones de Maxwell describen como los campos eléctrico y magnético se generan alterando uno y otro por cargas y corrientes eléctricas. Estas ecuaciones deben su nombre al físicomatemático escocés James Clerk Maxwell, quien publicó sus trabajos sobre estas ecuaciones entre 1861 y 1862.

Relatividad general



Representación de la curvatura dada por la ecuación de campo de Einstein sobre el plano de la eclíptica de una estrella esférica: Dicha ecuación relaciona la presencia de materia con la curvatura adquirida por el espacio-tiempo.

Las ecuaciones de campo de Einstein (conocidas también como “ecuaciones de Einstein”) son un conjunto de diez ecuaciones en derivadas parciales de la teoría de la relatividad general donde se describe la interacción fundamental de la gravitación como un resultado de que el espacio-tiempo es curvado por la materia y la energía.[16] Publicado por primera vez por Einstein en 1915[17] como una ecuación tensorial, las ecuaciones equiparan una curvatura espacio-tiempo local (expresada por el tensor de Einstein) con la energía y momentum local dentro del espacio-tiempo (expresado por el tensor de energía-impulso).[18]

Mecánica cuántica

En la mecánica cuántica, el análogo a la ley de Newton es la Ecuación de Schrödinger (una ecuación en derivadas parciales) para un sistema cuantificado (usualmente átomos, moléculas, y partículas subatómicas que pueden estar libres, ligadas, o localizadas). No es una ecuación algebraica simple, pero en general una ecuación en derivadas parciales y lineal, que describe la evolución en el tiempo de una función de onda (también llamada una “función de estado”).[19]

7.4.2 Biología

- Ecuación de Verhulst – para el crecimiento de población biológica.

- Modelo de von Bertalanffy – para el crecimiento individual biológico.
- Dinámica de replicación – en teoría biológica.
- Modelo de Hodgkin y Huxley – potenciales de acción neuronal.

Ecuaciones predador-presa

Las ecuaciones Lotka–Volterra, también conocidas como las ecuaciones predador-presa, son un par de ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden frecuentemente utilizadas para describir la dinámica de sistemas biológicos en los cuales interactúan dos especies, una el predador, y la otra, la presa.

7.5 Véase también

- Historia de las ecuaciones diferenciales
- Sistema de ecuaciones diferenciales
- Función diferenciable
- Ecuación integral
- Formulación débil de una ecuación diferencial

7.6 Referencias

[1] Newton, Isaac (1736) [1671]. *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum (The Method of Fluxions and Infinite Series)* (en inglés) **I**. Opuscula. p. 66.

[2] Bernoulli, Jacob (1695). «Explicationes, Annotationes & Additiones ad ea, quae in Actis sup. de Curva Elastica, Isochrona Paracentrica, & Velaria, hinc inde memorata, & paratim controversa legundur; ubi de Linea mediarum directionum, alliisque novis». *Acta Eruditorum* (en latín).

[3] Hairer, Ernst; Nørsett, Syvert Paul; Wanner, Gerhard (1993). *Solving ordinary differential equations I: Nonstiff problems* (en inglés). Berlín, Nueva York: Springer-Verlag. ISBN 978-3-540-56670-0.

[4] Cannon, John T.; Dostrovsky, Sigalia (1981). *The evolution of dynamics, vibration theory from 1687 to 1742*. Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences (en inglés) **6**. Nueva York: Springer-Verlag. pp. ix + 184 pp. ISBN 0-3879-0626-6.

[5] Gray, J.W. (Julio de 1983). «Book Reviews». *Bulletin of The American Mathematical Society (New Series)* **9** (1).

[6] Wheeler, Gerard F.; Crummett, William P. (1987). «The Vibrating String Controversy». *Am. J. Phys.* (en inglés) **55** (1): 33-37. Bibcode:1987AmJPh..55...33W. doi:10.1119/1.15311.

[7] «Herman H.J. Lynge & Søn A/S (International Antiquarian Booksellers Since 1821)» (en inglés). Consultado el 4 de abril de 2016.

[8] Por las contribuciones de Lagrange a las ecuaciones de ondas acústicas, consultar Pierce, Allan D. (1989). *Acoustics: An Introduction to Its Physical Principles and Applications* (en inglés). Acoustical Soc. of America. p. 18.

[9] Speiser, David (2008). *Discovering the Principles of Mechanics 1600-1800*. Basel: Birkhäuser. p. 191.

[10] Fourier, Jean-Baptiste Joseph (1822). *Théorie analytique de la chaleur* (en francés). París: Firmin Didot Père et Fils. OCLC 2688081.

[11] Boyce, William E.; DiPrima, Richard C. (1967). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* (en inglés) (4ª edición). John Wiley & Sons. p. 3.

[12] Weisstein, Eric W. «Ordinary Differential Equation Order». *MathWorld* (en inglés).

[13] «Order and degree of a differential equation» (en inglés). Consultado el 4 de abril de 2016.

[14] Zill, Dennis G. *A First Course in Differential Equations* (en inglés) (5ª edición). Brooks/Cole. ISBN 0-534-37388-7.

[15] Simmons, G. (1993). *Ecuaciones diferenciales* (2ª edición). McGraw-Hill.

[16] Einstein, Albert (1916). «The Foundation of the General Theory of Relativity». *Annalen der Physik* (Wikisource) **354** (7): 769. Bibcode:1916AnP...354..769E. doi:10.1002/andp.19163540702.

[17] Einstein, Albert (25 de noviembre de 1915). «Die Feldgleichungen der Gravitation». *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (en alemán): 844-847. Traducción al inglés: The Field Equations of Gravitation (Wikisource)

[18] Misner, Charles W.; Thorne, Kip S.; Wheeler, John Archibald (1973). «34». *Gravitation* (en inglés). San Francisco: W. H. Freeman. p. 916. ISBN 978-0-7167-0344-0.

[19] Griffiths, David J. (2004). *Introduction to Quantum Mechanics* (2ª edición). Prentice Hall. pp. 1-2. ISBN 0-13-111892-7.

7.6.1 Bibliografía

- Zill, Denis G. (2009). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado* (9ª edición). México: Cengage Learning Editores. ISBN 9708300551. Resumen divulgativo.
- Aranda Iriarte, José Ignacio (2008). *Apuntes de ecuaciones diferenciales I*. Universidad Complutense de Madrid.
- Aranda Iriarte, José Ignacio (2011). *Apuntes de ecuaciones diferenciales II (EDPs)*. Universidad Complutense de Madrid.

- Varona Malumbres, Juan Luis (1996). *Métodos clásicos de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias*. Universidad de la Rioja, España.
- Teschl, Gerald (2012). *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. Graduate Studies in Mathematics (en inglés) **140**. AMS. ISBN 978-0-8218-8328-0.

7.7 Enlaces externos

- Wikimedia Commons alberga contenido multimedia sobre **Ecuación diferencial**. Commons
- Soluciones exactas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
- Soluciones exactas de Ecuaciones Diferenciales Lineales en derivadas parciales
- Programa para resolver Ecuaciones diferenciales ordinarias escrito en Matlab

Capítulo 8

No linealidad

En matemáticas, los **sistemas no lineales** representan sistemas cuyo comportamiento no es expresable como la suma de los comportamientos de sus descriptores. Más formalmente, un sistema físico, matemático o de otro tipo es no lineal cuando las ecuaciones de movimiento, evolución o comportamiento que regulan su comportamiento son no lineales. En particular, el comportamiento de sistemas no lineales no está sujeto al principio de superposición, como lo es un sistema lineal.

En diversas ramas de las ciencias la no linealidad es la responsable de la comportamientos complejos y, frecuentemente, impredictibles o caóticos. La no linealidad frecuentemente aparece ligada a la autointeracción, el efecto sobre el propio sistema del estado anterior del sistema. En física, biología o economía la no linealidad de diversos subsistemas es una fuente de problemas complejos, en las últimas décadas la aparición de los ordenadores digitales y la simulación numérica ha disparado el interés científico por los sistemas no lineales, ya que por primera vez muchos sistemas han podido ser investigados de manera más o menos sistemática.

8.1 Introducción

La linealidad de un sistema permite a los investigadores hacer ciertas suposiciones matemáticas y aproximaciones, permitiendo un cálculo más sencillo de los resultados. Ya que los sistemas no lineales no son iguales a la suma de sus partes, usualmente son difíciles (o imposibles) de modelar, y sus comportamientos con respecto a una variable dada (por ejemplo, el tiempo) es extremadamente difícil de predecir.

Algunos sistemas no lineales tienen soluciones exactas o integrables, mientras que otros tienen comportamiento caótico, por lo tanto no se pueden reducir a una forma simple ni se pueden resolver. Un ejemplo de comportamiento caótico son las olas gigantes. Aunque algunos sistemas no lineales y ecuaciones de interés general han sido extensamente estudiados, la vasta mayoría son pobremente comprendidos.

8.1.1 Sistemas lineales

En matemáticas una función lineal es aquella que satisface las siguientes propiedades (ya que en un sistema tiene que poner en conjunto de dos o más ecuaciones).

1. Aditividad: $f(x+y) = f(x) + f(y)$
2. Homogeneidad: $f(\alpha\, x) = \alpha\, f(x)$

Estas dos reglas tomadas en conjunto se conocen como Principio de superposición.

8.1.2 Sistemas no lineales

Las ecuaciones no lineales son de interés en física y matemáticas debido a que la mayoría de los problemas físicos son implícitamente no lineales en su naturaleza. Ejemplos físicos de sistemas lineales son relativamente raros. Las ecuaciones no lineales son difíciles de resolver y dan origen a interesantes fenómenos como la teoría del caos. Una ecuación lineal puede ser descrita usando un operador lineal, L. Una ecuación lineal en algún valor desconocido de u tiene la forma

$$Lu = 0$$

Una ecuación no lineal es una ecuación de la forma:

$$F(u) = 0$$

Para algún valor desconocido de u .

Para poder resolver cualquier ecuación se necesita decidir en qué espacio matemático se encuentra la solución u . Podría ser que u es un número real, un vector o, tal vez, una función con algunas propiedades.

Las soluciones de ecuaciones lineales pueden ser generalmente descritas como una superposición de otras soluciones de la misma ecuación. Esto hace que las ecuaciones lineales sean fáciles de resolver.

Las ecuaciones no lineales son mucho más complejas, y mucho más difíciles de entender por la falta de soluciones

simples superpuestas. Para las ecuaciones no lineales las soluciones generalmente no forman un espacio vectorial y, en general, no pueden ser superpuestas para producir nuevas soluciones. Esto hace el resolver las ecuaciones mucho más difícil que en sistemas lineales.

8.2 Herramientas para la solución de ciertas ecuaciones no lineales

Al día de hoy, existen muchas herramientas para analizar ecuaciones no lineales, por mencionar algunas tenemos: dinámica de sistemas, teorema de la función implícita y la teoría de la bifurcación

- Malinietski G.G. 2006. *Fundamentos matemáticos de la sinergética. Caos, estructuras y simulación por ordenador*. .

8.3 Ejemplos de sistemas no lineales

Una importante colección de sistemas físicos y de otro tipo parecen venir descritos por sistemas de ecuaciones de evolución temporal que de hecho son ecuaciones diferenciales no lineales, algunos ejemplos notorios de no linealidad son los siguientes:

- Las **ecuaciones de campo de Einstein** que describen el campo gravitatorio dentro de la teoría de la relatividad general.
- Las **ecuaciones de Navier-Stokes** de la dinámica de fluidos, cuya complejidad las ha convertido en un problema matemático famoso (de hecho un problema peculiar ligado a estas ecuaciones constituye uno de los problemas del milenio propuestos por el Instituto Clay).
- La **óptica no lineal**.
- El **sistema del tiempo atmosférico** en la Tierra.
- El balanceo de un uniciclo robot.
- La ecuación de transporte de Boltzmann.
- La ecuación de Korteweg-de Vries.
- La ecuación no lineal de Schrödinger.

8.4 Véase también

- Aplicación lineal
- Ondas no lineales

8.5 Referencias

8.5.1 Bibliografía

- Malinietski G.G. 2006. *Fundamentos matemáticos de la sinergética. Caos, estructuras y simulación por ordenador*.
- YAN Kun(2011). Nonlinstor-A electronic circuit element based on the form of the nonlinear differential equation (Brief annotation of the connection equation(R)), Xi'an: Xi'an Modern Nonlinear Science Applying Institute.

8.5.2 Enlaces externos

- .

Capítulo 9

Azar

El **azar** es una casualidad[1] presente, teóricamente, en diversos fenómenos que se caracterizan por causas complejas, no lineales y sobre todo que no parecen ser predictibles en todos sus detalles. Dependiendo del ámbito al que se aplique, se pueden distinguir cuatro tipos de azar:

- **Azar en matemáticas**. En matemáticas, pueden existir series numéricas con la propiedad de no poder ser obtenidas mediante un algoritmo más corto que la serie misma. Es lo que se conoce como aleatoriedad. La rama de las matemáticas que estudia este tipo de objetos es la teoría de la probabilidad. Cuando esta teoría se aplica a fenómenos reales se prefiere hablar de estadística.

- **Azar en la física**. El azar puede darse en sistemas físicos indeterministas y deterministas. En los sistemas indeterministas no se puede determinar de antemano cuál será el suceso siguiente, como sucede en la desintegración de un núcleo atómico. Esta dinámica, azarosa, es intrínseca a los procesos que estudia la mecánica cuántica (subatómicos). Dentro de los procesos deterministas, también se da el azar en la dinámica de sistemas complejos impredecibles, también conocidos como sistemas caóticos.

- **Azar en biología**. Las mutaciones genéticas son generadas por el azar. Las mutaciones se conservan en el acervo genético, pudiendo aumentar así las oportunidades (en general, la mutación genética no genera cambios fenotípicos en el organismo, y solo en algunos casos se presentan patologías causadas por el efecto negativo de la mutación, en otras oportunidades, la mutación puede generar alelos que impacten de manera positiva sobre el organismo para desempeñar sus actividades) de supervivencia y reproducción que los genes mutados confieren a los individuos que los poseen. Normalmente las características de un organismo se deben a la genética y al entorno, pero también las recombinaciones genéticas son obra del azar.

- **Azar como encuentro accidental**. Plantilla: Aristóteles. Física II, 6.197 b 7ss Esta situación es considerada azar porque los procesos que coinciden son independientes, no hay relación causal entre ellos, aunque cada uno tenga una causa que actúe de modo necesario. Así, un macetero cae por una causa necesaria: la gravedad; pero es azaroso que en su trayectoria coincida con un peatón.

9.1 Azar y filosofía

El **azar ontológico** es el que forma parte del ser. Aunque se encuentren leyes deterministas en determinados ámbitos, habrá procesos que son irreductiblemente espontáneos y aleatorios, independientemente del avance del conocimiento.[2]

El **azar epistemológico** es aquel que se encuentra en el conocimiento bien sea por ignorancia, por incapacidad para tratar sistemas complejos en un mundo determinista o bien porque exista un auténtico azar ontológico. [*cita requerida*]

El determinismo, en cambio, afirma que no existe el azar ontológico. Los procesos considerados aleatorios serían en realidad eventos en los que se ha desatendido a las particularidades (o es excesivamente trabajoso o complejo estudiarlas).

El conocimiento científico parte del supuesto de la existencia de unas leyes de la naturaleza que determinan el acontecer del mundo, y que es posible conocerlas. Poder determinar el grado de determinismo que dichas leyes implican y el ámbito de su aplicación es esencial para la valoración del conocimiento científico. Se considera que las leyes de la física clásica que describen adecuadamente muchos fenómenos son deterministas (aunque no nocesariamiente predictibles, por la existencia de caos determinista), mientras que muchos científicos consideran que por ejemplo en física cuántica existen fenómenos esencialmente azarosos y no deterministas.

La creencia en un determinismo total como ciencia del conocimiento adecuado de la realidad y su carácter predictivo parece problemático para la existencia de libre albedrío. Así se ha considerado en algunos momentos. La ciencia actuaria, en la consideración del estudio de sistemas complejos y sistemas abiertos matiza la consideración del determinismo de las leyes de la naturaleza.[3]

Hay quien afirma no se es libre por tomar una decisión de libre albedrío o aleatoria, sino por tomar una decisión autónoma y razonada, es decir, según la voluntad. Sin embargo al afirmar esto no hace sino identificar su yo libre exclusivamente con su cortex préfrontal, que es aquél que racionaliza de forma autónoma la decisión de todo su ser.

9.2 Azar frente a impredictibilidad

Los fenómenos de ocurrencia regular o recurrentes manera fija, son fenómenos predictibles. Si se observan durante un cierto tiempo puede descubrirse que se repiten de manera periódica y muy fija. Cuando un fenómeno no es predictible frecuentemente se considera un fenómeno azaroso. Hasta el advenimiento de la teoría del caos, se creía que todos los sistemas deterministas eran necesariamente preditibles y, por tanto, no azarosos.

Sin embargo, el **caos determinista** se refiere a un tipo de situación de sistemas físicos (o de otro tipo) que a pesar de ser deterministas y presentan cierta predictibilidad estadítica general, resultan impredecibles en sus detalles o a pequeña escala. En estos casos la descripción mediante modelos matemáticos deterministas que reproducen todos los detalles, se vuelve inviable y para describirlos o tratarlos se suele trabajar con descripciones estadísticas de conjuntos de grandes cantidades de elementos, cada uno de ellos impredecible de manera individual pero no así globalmente. En física estadística, por ejemplo, este concepto se puede encontrar en la interpretación estadística de Boltzmann de la segunda ley de la termodinámica.

Los sistemas turbulentos son aquellos cuya evolución no es predecible a corto plazo debido a que variaciones infinitesimales en las condiciones provocan cambios exponenciales. Aleatoriedad y no predictibilidad en estos casos no son equivalentes. Estos son un ejemplo claro de complejidad.

9.3 Azar y ciencia natural

Desde que Isaac Newton presentó su nueva forma de hacer ciencia, ésta fue asociada al determinismo. Como para el determinismo el azar sólo puede ser epistemológico, considera preferibles las teorías científicas de las que se desprenden leyes en las que no tiene cabida el azar. Bajo el punto de vista del cientificismo clásico, un evento era aparentemente aleatorio cuando no podía establecerse o controlarse su causa. Se podía asimilar a la ignorancia.

Con el desarrollo de las nuevas teorías científicas sobre sistemas caóticos o turbulentos, y cuánticos, muchos científicos reconsideraron la validez del azar en la física. Según la llamada interpretación de Copenhague de la mecánica cuántica, en un experimento controlado en hasta sus más mínimos detalles, siempre hay un grado de aleatoriedad en el resultado. Muchos procesos físicos de carácter cuántico podrían ser irreductiblemente aleatorios. Las leyes de la desintegración atómica pueden predecir el número de núcleos de un cuerpo radiactivo que se desintegrará en un período dado de tiempo, pero no cuándo lo hará un núcleo concreto. Sin embargo, han surgido diferentes objeciones a esta interpretación, como la teoría de las variables ocultas, que sostiene que el resultado del experimento viene determinado por un cierto número de características aún desconocidas. Otra interpretación es la de los universos paralelos, propuesta por Hugh Everett, según la cual todos los posibles resultados se dan, en todo un conjunto de universos. Aún no se ha podido diseñar un experimento que contraste o descarte alguna de las interpretaciones, por lo que la controversia permanece vigente.

9.4 Azar y matemáticas

El cálculo de probabilidades nos da las leyes de un sistema que se puede clasificar como aleatorio, por lo que el cálculo en sí mismo es determinista, aunque de forma diferente al determinismo fisicoclásico. Mientras que éste se refiere al determinismo de objetos individuales, las probabilidades se refieren al determinismo de conjuntos.[*cita requerida*]

9.5 Azar en comunicaciones

Una comunicación correcta depende, entre otras cosas, de la minimización del efecto deletéreo del ruido. Éste impone límites a la eficiencia de la comunicación. El estudio de dichos límites condujo a Claude Shannon al desarrollo de la teoría de la información, a efectuar aportaciones fundamentales a la teoría de la comunicación y a establecer las bases teóricas de la criptografía.

El acceso a una fuente de aleatoriedad de alta calidad es crítica en criptografía. La elección de una clave muy ligeramente no aleatoria puede resultar en el desciframiento de las comunicaciones.

9.6 Véase también

- Aleatorización (o randomización)
- Apofenia
- Caos
- Determinismo científico
- Dinámica de sistemas
- Indeterminismo
- Juegos de azar
- Ley de los números grandes

- Número aleatorio
- Proceso estocástico
- Sistema complejo
- Sistema dinámico
- Variable aleatoria

9.7 Referencias

[1] Real Academia Española. http://buscon.rae.es/drae/srv/search?val=azar

[2] C.Tamagnone, *De la nada al volverse de la pluralidad* (*El pluralismo ontofisico entre la energía, la información, la complexidad, el caso y la necessidad*.), Florentia, Clinamen 2009, pp.426-427

[3] http://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=i4fSedNiNnEC&oi=fnd&pg=PA15&dq=Orden+y+caos&ots=ImtNfooP3K&sig=rDZksuHbZh4UvykyPKlonbDyjVM#v=onepage&q&f=false

9.7.1 Enlaces externos

- Wikiquote alberga frases célebres de o sobre **Azar**. Wikiquote

9.8 Origen del texto y las imágenes, colaboradores y licencias

9.8.1 Texto

- **Teoría del caos** *Fuente:* https://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_del_caos?oldid=98999842 *Colaboradores:* Youssefsan, Joseaperez, Oblongo, Fibonacci, Sabbut, Moriel, Frutoseco, JorgeGG, Robbot, Zwobot, Interwiki, Dodo, Cookie, Tostadora, Xgarciaf, Julian Colina, Tano4595, El Moska, Xenoforme, Echiner, Aalku, AlGarcia, Jabernal, Benjavalero, Jgalgarra, Murtasa, Rapomon, Digigalos, Boticario, Gusarrgg, Mescalier, Airunp, Yrithinnd, Taichi, Rembiapo pohyiete (bot), LeCire, Tico~eswiki, Orco70, Magister Mathematicae, Lumen, Orgullobot~eswiki, RobotQuistnix, Alhen, Caiserbot, Unificacion, Maleiva, .Sergio, YurikBot, Mortadelo2005, KnightRider, Cfuentea~eswiki, Estoeselcolmo, Amadosanchez, Kepler Oort, José., Maldoror, Haku, Tomatejc, Jarke, Nihilo, Linus~eswiki, Axxgreazz, BOTpolicia, CEM-bot, Tapioca, Alexav8, Carlab89, Marianov, Eli22, Roberpl, Davius, Antur, Baldercm, Ingenioso Hidalgo, Thijs!bot, Drake 81, Ffahm, Egaida, MSBOT, JAnDbot, Mansoncc, Zufs, CommonsDelinker, TXiKiBoT, Gustronico, Humberto, Netito777, Sincro, Nioger, Bedwyr, Idioma-bot, Alefisico, Pólux, Dhidalgo, TottyBot, AlnoktaBOT, Masacroso, Aibot, Technopat, Matdrodes, Fiquei, DJ Nietzsche, BlackBeast, Lucien leGrey, AlleborgoBot, Muro Bot, SieBot, PaintBot, Loveless, Macarrones, Renemoralesduarte, Wilfreddehelm, Carmin, Bigsus-bot, Guillem d'Occam, Jcd, Txukiya, Tirithel, HUB, Janumna, Gato ocioso, DragonBot, Farisori, Quijav, VMoreira, Juan Mayordomo, BodhisattvaBot, SilvonenBot, SergioN, Abajo estaba el pez, AVBOT, MastiBot, MarcoAurelio, SpBot, Diegusjaimes, MelancholieBot, Andreasmperu, Luckas-bot, Spirit-Black-Wikipedista, Joronstro, Panerowsky, Kikespn, Juanrj, Xqbot, Jkbw, Lycaon83, Botarel, Proitsen, Alexlp182, Gpanter, Jerowiki, PatruBOT, Gustavo Girardelli, Nachosan, Foundling, GrouchoBot, Bachi 2805, Savh, Grillitus, Juancar24578, Chiwakaelketefocka, Jmonzo, WikitanvirBot, Rufflos, Antonorsi, KLBot2, Jaluj, Travelour, MetroBot, Invadibot, Elvisor, Helmy oved, Balles2601, Jarould, BenjaBot, Sherezadee, Rod6013, Wiki LIC, Fernando2812l, Meylinojeda, Daellolasdf, Mr.urgrs, Alfredito31416, Solotetes, Miauduvi, MomijiRoBot, Grothcull, Semibot y Anónimos: 253

- **Efecto mariposa** *Fuente:* https://es.wikipedia.org/wiki/Efecto_mariposa?oldid=99016369 *Colaboradores:* Sabbut, Robbot, Rosarino, Dodo, Elwikipedista, Xgarciaf, Loco085, Jabernal, Robotico, Balderai, Abelmartin, Edub, Rembiapo pohyiete (bot), Rupert de hentzau, RobotQuistnix, Amadís, Vitamine, YurikBot, Mortadelo2005, Eskimbot, Chlewbot, Roche, Jstitch, Since, CEM-bot, Pinar~eswiki, Pavlemadrid, Davius, Frmerced, Antur, Jfmelero, Gabe Damage, Ingenioso Hidalgo, Thijs!bot, Manolino, RoyFocker, Isha, Egaida, MSBOT, TARBOT, Chien, TXiKiBoT, Tegin, Gustronico, Humberto, Rei-bot, Nekemus, Fixertool, Nioger, Idioma-bot, Qoan, Pólux, Zeroth, Delphidius, Fremen, Emtei, VolkovBot, Technopat, XavideOz, Matdrodes, Carlosu7, Herresuelo, BlackBeast, Muro Bot, SieBot, Loveless, Macarrones, BOTarate, MaQy, Drimeonux, BuenaGente, Felipunk182, Mafores, Maxlb619, Alvarotf, Mutari, Rafael95ian, Jarisleif, Nicop, DragonBot, Eduardosalg, Leonpolanco, Alejandrocaro35, VFGP, Pichu VI, PetrohsW, Migui 07, Miesma, Ravave, SilvonenBot, Killery28, Camilo, UA31, AVBOT, Miik Ezdanitofff, David0811, LucienBOT, MastiBot, Diegusjaimes, DumZiBoT, Arjuno3, Blaxman, Gbaldis, Andreasmperu, Luckas-bot, Amirobot, NecroHAQ, Nallimbot, Bsea, Yodigo, Daytona, ArthurBot, Genjuro, SuperBraulio13, Xqbot, Jkbw, Ryback, Batiacosta, Bodigami, Botarel, Kaka-tua, RubiksMaster110, Panderine!, D'ohBot, Maleja19, Caritdf, Gonzav8, AnselmiJuan, Alvaro1022, PatruBOT, Mr.Ajedrez, Tarawa1943, Foundling, Gauri, Aihotz, EmausBot, LucyJhonson, Africanus, Grillitus, SilverBOT, Stephjaimesl, Namreg9210, Invadibot, Fer flash1, Bibliofilotranstornado, Mega-buses, Elvisor, Helmy oved, Angel acmilan, AxellSanchezLeon, Totemkin, MaKiNeoH, Addbot, Balles2601, Cngongora, AlanGFesta, MisDosCentavos, Kim G. Robertson, Jarould, María Pilar Núñez Lizondo, AlvaroMolina, Adriangfgi5u, Rinokumura vs tsunasawada, Yessmortal, Lectorina, CAPTAIN RAJU, Popraka - luna, Mathyw15, Vegettarex777omg, La buchona 69, Negro follador y Anónimos: 315

- **Fractal** *Fuente:* https://es.wikipedia.org/wiki/Fractal?oldid=99107733 *Colaboradores:* Youssefsan, Romero Schmidtke, Llull~eswiki, RafaelGV, Zuirdj, Youandme, Fibonacci, Moriel, JorgeGG, Pilaf, Godelart, Zwobot, Tony Rotondas, Paz.ar, Dodo, Ejrrjs, Ascánder, Cookie, Tano4595, Milu~eswiki, Jarfil, Carlos Quesada~eswiki, Wricardoh, Domaniom, Rondador, Cinabrium, Alexan, Boticario, Coroliano, Orgullomoore, AlfonsoERomero, Airunp, Aeveraal, Taichi, Rembiapo pohyiete (bot), Orco70, Magister Mathematicae, RobotQuistnix, Unf, Chobot, Elkie, Yrbot, BOT-Superzerocool, FlaBot, YurikBot, Mortadelo2005, Wewe, KnightRider, Santiperez, Eskimbot, José., Smoken Flames, Matiasasb, Axxgreazz, BOTpolicia, Alejandrosanchez, CEM-bot, Josepmbf61, Alexav8, Ignacio Icke, Marianov, Davius, Montgomery, Alvaro qc, Srengel, Xabier, Tortillovsky, Zupez zeta, JoaquinFerrero, Max Changmin, DokiDoki, Fullgigapower, Mpeinadopa, JAnDbot, Rambaut, Homo logos, Gsrdzl, CommonsDelinker, TXiKiBoT, Rlunaro, Tegin, Gustronico, Bot-Schafter, Humberto, Pabloallo, Roc21, Chabbot, Idioma-bot, Qoan, Pólux, Gerwoman, DonBarredora, Leoz~eswiki, AlnoktaBOT, VolkovBot, Technopat, C'est moi, Matdrodes, Synthebot, Tatvs, Jonasr~eswiki, Numbo3, Srbanana, BotMultichill, SieBot, PaintBot, Carmin, Cobalttempest, Drinibot, Bigsus-bot, Mel 23, Deodato, Qbit, Tirithel, Adriana3d, Factotum~eswiki, Nicop, Gato ocioso, Farisori, Quijav, McMalamute, Eduardosalg, Leonpolanco, Coren~eswiki, 672, Juan Mayordomo, Frei sein, Mike.lifeguard, Camilo, UA31, AVBOT, Dermot, LucienBOT, MastiBot, Angel GN, Diegusjaimes, CarsracBot, Kyle the bot, Arjuno3, Andreasmperu, Luckas-bot, Daunis~eswiki, ArthurBot, SuperBraulio13, Xqbot, Jkbw, FrescoBot, Bot0811, Lucianosoda, Igdfpro, Miguel.izquierdo.garcia, AstaBOTh15, Aqualung~eswiki, Sergio Rodrgz. Labra, Hprmedina, Leugim1972, PatruBOT, Ganímedes, Humbefa, Luffier, N-Eber, EmausBot, Kairosart, Savh, AVIADOR, ZéroBot, Rubpe19, Cal Jac02, Cordwainer, Melijoan, Kostellus, MerlIwBot, Raysheaf, Elkingkapo, Sebrev, Sergspin, Invadibot, Sixthpoison, Tesssla, Bibliofilotranstornado, Fractalina, Josep m batlle, Elvisor, Sanscho, Helmy oved, Gablot ier Van, Hernanpazosmendez, Legobot, Josep m batlle2, El sakro, Soler97, Jarould, AwesomeRacoon, BenjaBot, Lagoverdo, Lara zeman25, Aag fractal, WikiCT y Anónimos: 268

- **Sistema** *Fuente:* https://es.wikipedia.org/wiki/Sistema?oldid=99249358 *Colaboradores:* Soniautn, Moriel, JorgeGG, Verbose, Guevonaso, Sanbec, Zorosandro, Rosarino, Sms, Rsg, Cookie, Elwikipedista, Tano4595, Murphy era un optimista, LPR, Marcoscaceres, Quesada, Richy, Nopuomas, Boticario, Deleatur, Xuankar, Airunp, LP, Magister Mathematicae, RobotQuistnix, Platonides, Alhen, Superzerocool, Unificacion, Yrbot, Amadís, FlaBot, Varano, Vitamine, .Sergio, YurikBot, Gaeddal, Wewe, Equi, Unaiaia, Gaijin, Jesuja, Santiperez, Banfield, Tomatejc, Folkvanger, Aleator, BOTpolicia, Gizmo II, CEM-bot, Alejandrosilvestri, Pinar~eswiki, Paradyso, Chabacano, Salvador alc, Xexito, SISTEM ZETTA, Baiji, BDD-BQ-Grupo2, Davius, Antur, Jjafjjaf, FrancoGG, Thijs!bot, Musicantor, Srengel, Dagoflores, Tortillovsky, Diosa, RoyFocker, Leandroidecba, Max Changmin, Mario modesto, Nosce~eswiki, Isha, Bernard, Góngora, JAnDbot, VanKleinen, Kved, Wadim, Mansoncc, Argeektect, Muro de Aguas, Limbo@MX, Cespinoza, Hidoy kukyo, Mercenario97, Bboccioz, Elisardojm, Humberto, Netito777, Sincro, Fixertool, Nioger, Jose3145, Pólux, Sebasgs, Xvazquez, Manuel Trujillo Berges, Jtico, Delphidius, AlnoktaBOT, Technopat, Galandil, Queninosta, Libertad y Saber, Matdrodes, DJ Nietzsche, BlackBeast, Lucien leGrey, 3coma14, Edmenb, Ginsu2003, Komputisto, Willygarcia, BotMultichill, Gerakibot, Jmvgpartner, SieBot, Loveless, Cobalttempest, Rigenea, Alejandro linconao, Rivemar, Marcelo, Mel 23, Correogsk, Greek, BuenaGente, Mafores, Fadesga, Tirithel, XalD, Jarisleif, ToePeu.bot, Farisori, Eduardosalg, Neodop, Leonpolanco, Pan con queso, Petruss, BetoCG, Tlaoakaiser, Toolserver, Açipni-Lovrij, PePeEfe, Gelpgim22, Camilo, UA31, Abajo estaba el pez, Armando-Martin, AVBOT, David0811, MastiBot, Angel GN, MarcoAurelio, Diegusjaimes, Malankis, Arjuno3, Andreasmperu, Luckas-bot, Amirobot, Felipus phoenix, Spirit-Black-Wikipedista, Nallimbot, ESanchez013, Rubin16, Ptbotgourou, Euskal Hooligan, Yonidebot, Sophivorus, Dkal777, ArthurBot, Argentinoo, SuperBraulio13, M.heda, Xqbot, Jkbw, Rubinbot, Daniel

unam, FrescoBot, Ricardogpn, Isracd, Igna, Botarel, Panderine!, BOTirithel, Hprmedina, Linux65, TobeBot, Caritdf, Andilea, FAL56, PatruBOT, Ganímedes, Dinamik-bot, Jorge c2010, Rincondelgabo, Foundling, Mathonius, Wikiléptico, Gauri, Axvolution, EmausBot, Savh, AVIADOR, Pitu NYX, HRoestBot, Allforrous, TuHan-Bot, Profesorpruebas, Africanus, Tkn50, Grillitus, Jcaraballo, ChuispastonBot, Juliox garto, MadriCR, Waka Waka, NDTA48, Rafaelkelvin, Antonorsi, MerlIwBot, Pichtchikova, Lkami1999, Ginés90, Nath82, Des3000, Lfgg2608, Aletutu1, Benarcantos11, Seasz, Acratta, LlamaAl, Jose luis siguenza, Creosota, Esp1986, Lu0490, Santga, Helmy oved, ElGatoSaez, Alexivanbau, Leitoxx, Lautaro 97, Addbot, Jmramosmejia, Balles2601, Jonathanjpj, Th3moltres, Yoni alexander, Yebeh, CrisstianRamirez, VictorPines, Laberinto16, Jarould, Matiia, Crystallizedcarbon, Mariosand23, BenjaBot, 4lextintor, Lectorina, Andermind, “El Bauto”, Ks-M9, Nathanael gil alvarez, TheXGamerYT, Sofia Granja, EleganSEtFidelis, Mortizo, Ender Maita y Anónimos: 699

- **Sistema complejo** *Fuente:* https://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_complejo?oldid=96677930 *Colaboradores:* Sanbec, Sms, Luisrull, Julian Colina, Fenice~eswiki, Xenoforme, Rondador, Jabernal, Renabot, Emijrp, LP, Tico~eswiki, Lumen, Jarlaxle, Caiserbot, LuchoX, Pretor, Icvav, Martingala, Boninho, Chlewbot, Lancaster, Nihilo, BOTpolicia, Pastranec, CEM-bot, RoRo, Davius, Lauranrg, Clementito, Isha, Ebr, PabloGN, JAnDbot, Dhidalgo, Barandiaran, Technopat, Jotego, Muro Bot, Feministo, Ensada, Letranova~eswiki, Fadesga, HUB, Farisori, Leonpolanco, Jmagallanes, Maurizio.Cattaneo, SilvonenBot, UA31, AVBOT, Diegusjaimes, Arjuno3, Argentumm, Andreasmperu, Sergiportero, Dagofloreswi, Nixón, ArthurBot, Abigor, Jkbw, Jmgalan, TobeBot, Ctercero, PatruBOT, Pilarbarrio, EmausBot, ZéroBot, Grillitus, Syndi, WikitanvirBot, Migueltronn, Omarch1405, MerlIwBot, Pietrus, Acratta, NicolasMalinowski, Elvisor, Gerardmalinac, RosenJax, NManthi, DigitalDev, Addbot, Balles2601, Panda Girl, Jarould, Ks-M9, Héctor Osorio Ramírez y Anónimos: 71
- **Sistema dinámico** *Fuente:* https://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_din%C3%A1mico?oldid=98593332 *Colaboradores:* Zuirdj, Fibonacci, Vivero, Zwobot, Dodo, Julian Colina, Tano4595, Hador, Vicaram, Cinabrium, Aalku, Jabernal, Periku, Rembiapo pohyiete (bot), LP, RobotQuistnix, Elferdo, Chobot, Maleiva, Vitamine, BOTijo, YurikBot, Icvav, GermanX, Zam, KnightRider, José., Nihilo, Jstitch, CEM-bot, Alexav8, Davius, Ingenioso Hidalgo, Thijs!bot, Egaida, AlnoktaBOT, Nasil, SieBot, DorganBot, GRHugo, Farisori, DoN vErDuGo, UA31, AVBOT, Sephirotmundi, Diegusjaimes, Luckas-bot, Abigor, Jkbw, Artlejandra, RedBot, Cagoscra, PatruBOT, Jorge c2010, EmausBot, JackieBot, MerlIwBot, NyappyBOT, Acratta, Elvisor, Addbot, Trampolinesss, JuanManwell, SAREVALOG, Jarould, BenjaBot, Rubentl134 y Anónimos: 55
- **Ecuación diferencial** *Fuente:* https://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n_diferencial?oldid=99280398 *Colaboradores:* Romero Schmidtke, EL Willy, Pino, Joseaperez, Sabbut, Moriel, Jumaca, Sauron, JorgeGG, Pilaf, Robbot, Guevonaso, Ivn, Interwiki, Drjackzon, Nolambar, Sms, Th3j0ker, Tano4595, Agguizar, Robotito, Yawmoght, Porao, Schummy, Petronas, Rembiapo pohyiete (bot), Magister Mathematicae, RobotQuistnix, Alhen, Chobot, Yrbot, Vitamine, YurikBot, GermanX, Gaijin, KnightRider, The Photographer, Txo, Eskimbot, Maldoror, Chlewbot, Nihilo, CEM-bot, Deco28, Thanos, Davius, Antur, Dorieo, Ingenioso Hidalgo, Thijs!bot, Alvaro qc, Lauranrg, Ninovolador, Soulbot, Hosg, CommonsDelinker, TXiKiBoT, Francisco J. de Anda, Rei-bot, Teytor, Pólux, Uruk, Almendro, AlnoktaBOT, Aibot, Matdrodes, Fiquei, Berfito, BlackBeast, Shooke, AlleborgoBot, Numbo3, Gerakibot, SieBot, Francisco Mochis, Pompilio Zigrino, Hu12, Mel 23, Greek, BuenaGente, Gabriel Vidal Álvarez, Javierito92, Antón Francho, DragonBot, Farisori, Eduardosalg, Veon, Antionio, Poco a poco, Alexbot, Vircco, Raulshc, Mmvmejia, SilvonenBot, Camilo, UA31, AVBOT, Swatnio, LucienBOT, MastiBot, Tanhabot, Cibi3d, SpBot, Diegusjaimes, Pparanda, Luckas-bot, Sessho-akat, ArthurBot, EmmanuelRdzS, SuperBraulio13, Almabot, Xqbot, Jkbw, Botarel, Jlrod89, BOTirithel, MondalorBot, RedBot, DixonDBot, PatruBOT, KamikazeBot, TjBot, Humbefa, CentroBabbage, EmausBot, Savh, TuHan-Bot, Radeon~eswiki, ChuispastonBot, WikitanvirBot, Hiperfelix, DM94, JESSIP, MerlIwBot, Javmarina, TeleMania, Jharni Elmer Neyra Valverde, Invadibot, Acratta, LWQ~eswiki, Elvisor, Helmy oved, Rauletemunoz, Addbot, Balles2601, LAURG, JacobRodrigues, Jamez42, Jarould, MrCamoga, Mnrka, BenjaBot, Jocam 22, Lectorina, Wiki LIC, Jualve, EscobaSinGracia, MomijiRoBot, Javier Maquina y Anónimos: 236
- **No linealidad** *Fuente:* https://es.wikipedia.org/wiki/No_linealidad?oldid=99303260 *Colaboradores:* Oblongo, Tano4595, Lumen, RobotQuistnix, Chobot, YurikBot, CEM-bot, Daniel De Leon Martinez, Mariano12 1989, Davius, Egaida, TXiKiBoT, Humberto, Netito777, Idioma-bot, VolkovBot, Matdrodes, AlleborgoBot, YonaBot, SieBot, Loveless, Bigsus-bot, Jorgelsotelo, MetsBot~eswiki, StarBOT, AVBOT, MastiBot, Luckas-bot, Amirobot, Nallimbot, FariBOT, Jkbw, Wikielwikingo, PatruBOT, Humbefa, Felipe Raimann, Savh, WikitanvirBot, Legobot, 4x8rot, Lectorina, Zuriel barba, Gme89 y Anónimos: 22
- **Azar** *Fuente:* https://es.wikipedia.org/wiki/Azar?oldid=99194290 *Colaboradores:* 4lex, Jamawano, Rosarino, Ascánder, Julian Colina, Tano4595, Dianai, Arrt-932, Soulreaper, Airunp, Johnbojaen, Kokoo, BOT-Superzerocool, Vitamine, YurikBot, GermanX, Txo, BludgerPan, Zanaqo, BOTpolicia, CEM-bot, BlackSalamander, Davius, Antur, Ingenioso Hidalgo, Marianokin, Xabier, Tortillovsky, Antipatico, Rjm~eswiki, Apardo1, Netito777, Rei-bot, MONIMINO, Mazuelo, ZrzlKing, Gerwoman, Rovnet, Lordyk, VolkovBot, Technopat, MILEPRI, DJ Nietzsche, Saintcortex, AlleborgoBot, Muro Bot, SieBot, Mushii, BOTarate, STBot~eswiki, Mel 23, HUB, Farisori, Eduardosalg, Juan Mayordomo, Maurizio.Cattaneo, VanBot, UA31, AVBOT, Rogebcn, Hiworld, Arjuno3, Moralc, Andres Rojas, HB, Sophivorus, SuperBraulio13, Kender00, Jkbw, EnlazaBOTquote, Florendas, HUBOT, PatruBOT, Jorge c2010, Mendozar80, KLBot, Hiperfelix, Rufflos, MerlIwBot, Xoquito, IlairSesnas, Invadibot, Acratta, Johnbot, LlamaAl, Elvisor, Lautaro 97, Addbot, JPOK, Revisordespam, Jarould, Bruno Rene Vargas, Crystallizedcarbon, BenjaBot, Sebastian seminario, CarlosSuarezCx, Neoking, Mila González, Krassnine y Anónimos: 81

9.8.2 Imágenes

- **Archivo:A_Trajectory_Through_Phase_Space_in_a_Lorenz_Attractor.gif** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/13/A_Trajectory_Through_Phase_Space_in_a_Lorenz_Attractor.gif *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Dan Quinn
- **Archivo:CaosDI1.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/89/CaosDI1.jpg *Licencia:* Public domain *Colaboradores:* No machine-readable source provided. Own work assumed (based on copyright claims). *Artista original:* No machine-readable author provided. Yrithinnd assumed (based on copyright claims).
- **Archivo:CaosDI10.JPG** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1c/CaosDI10.JPG *Licencia:* Public domain *Colaboradores:* No machine-readable source provided. Own work assumed (based on copyright claims). *Artista original:* No machine-readable author provided. Yrithinnd assumed (based on copyright claims).
- **Archivo:CaosDI2.JPG** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/89/CaosDI2.JPG *Licencia:* Public domain *Colaboradores:* No machine-readable source provided. Own work assumed (based on copyright claims). *Artista original:* No machine-readable author provided. Yrithinnd assumed (based on copyright claims).

- **Archivo:CaosDI4.JPG** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d0/CaosDI4.JPG *Licencia:* Public domain *Colaboradores:* No machine-readable source provided. Own work assumed (based on copyright claims). *Artista original:* No machine-readable author provided. Yrithinnd assumed (based on copyright claims).
- **Archivo:CaosDI5.JPG** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/3c/CaosDI5.JPG *Licencia:* Public domain *Colaboradores:* No machine-readable source provided. Own work assumed (based on copyright claims). *Artista original:* No machine-readable author provided. Yrithinnd assumed (based on copyright claims).
- **Archivo:CaosDI6.JPG** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/63/CaosDI6.JPG *Licencia:* Public domain *Colaboradores:* No machine-readable source provided. Own work assumed (based on copyright claims). *Artista original:* No machine-readable author provided. Yrithinnd assumed (based on copyright claims).
- **Archivo:CaosDI7.JPG** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c2/CaosDI7.JPG *Licencia:* Public domain *Colaboradores:* No machine-readable source provided. Own work assumed (based on copyright claims). *Artista original:* No machine-readable author provided. Yrithinnd assumed (based on copyright claims).
- **Archivo:CaosDI8.JPG** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/67/CaosDI8.JPG *Licencia:* Public domain *Colaboradores:* No machine-readable source provided. Own work assumed (based on copyright claims). *Artista original:* No machine-readable author provided. Yrithinnd assumed (based on copyright claims).
- **Archivo:CaosDI9.JPG** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/9a/CaosDI9.JPG *Licencia:* Public domain *Colaboradores:* No machine-readable source provided. Own work assumed (based on copyright claims). *Artista original:* No machine-readable author provided. Yrithinnd assumed (based on copyright claims).
- **Archivo:Commons-logo.svg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/4a/Commons-logo.svg *Licencia:* Public domain *Colaboradores:* This version created by Pumbaa, using a proper partial circle and SVG geometry features. (Former versions used to be slightly warped.) *Artista original:* SVG version was created by User:Grunt and cleaned up by 3247, based on the earlier PNG version, created by Reidab.
- **Archivo:Cos(Z)_+_1partitC_iter=300.jmb.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/0e/Cos%28Z%29_%2B_1partitC_iter%3D300.jmb.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep M Batlle i Ferrer
- **Archivo:Dlasim.PNG** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1e/Dlasim.PNG *Licencia:* CC-BY-SA-3.0 *Colaboradores:* www.guragu.de / ich bin Eigentümer der Seite und habe das Bild selbst “erzeugt” *Artista original:* C. Hoberg
- **Archivo:Double-compound-pendulum.gif** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/45/Double-compound-pendulum.gif *Licencia:* Public domain *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Catslash
- **Archivo:EXP(C3_Z3).jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/22/EXP%28C3_Z3%29.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep M Batlle
- **Archivo:EXP(Z_C4).JPG** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/09/EXP%28Z_C4%29.JPG *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep M Batlle
- **Archivo:Elmer-pump-heatequation.png** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/cd/Elmer-pump-heatequation.png *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* ? *Artista original:* ?
- **Archivo:Exp(Z2_(C5_+_C)).jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/2b/Exp%28Z2_%28C5_%2B_C%29%29.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep M Batlle i Ferrer
- **Archivo:Exp(Z3)_zoom.jmb.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7e/Exp%28Z3%29_zoom.jmb.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep M Batlle i Ferrer
- **Archivo:Fractal471763.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/3a/Fractal471763.jpg *Licencia:* GFDL *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Yo Mismo
- **Archivo:Fractal_fern_explained.png** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/4b/Fractal_fern_explained.png *Licencia:* Public domain *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* António Miguel de Campos
- **Archivo:Gravitation_space_source.png** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/26/Gravitation_space_source.png *Licencia:* CC-BY-SA-3.0 *Colaboradores:* ? *Artista original:* ?
- **Archivo:HarmOsc1.png** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/2a/HarmOsc1.png *Licencia:* CC-BY-SA-3.0 *Colaboradores:* No machine-readable source provided. Own work assumed (based on copyright claims). *Artista original:* No machine-readable author provided. LP~commonswiki assumed (based on copyright claims).
- **Archivo:Heat_eqn.gif** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a9/Heat_eqn.gif *Licencia:* Public domain *Colaboradores:* This graphic was created with MATLAB. *Artista original:* Oleg Alexandrov
- **Archivo:JULIA2.jmb.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/cc/JULIA2.jmb.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep m batlle2
- **Archivo:JULIA3.jmb.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/49/JULIA3.jmb.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep m batlle2
- **Archivo:JULIA4.jmb.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/84/JULIA4.jmb.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep m batlle2
- **Archivo:JULIA5.jmb.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/93/JULIA5.jmb.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep m batlle2
- **Archivo:JULIA6.jmb.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c1/JULIA6.jmb.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep m batlle2
- **Archivo:JULIA7.jmb.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c7/JULIA7.jmb.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep m batlle2
- **Archivo:JULIA_Exp(z)+c_CX=_0.65.jmb.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/2c/JULIA_Exp%28z%29%2Bc_CX%3D_0.65.jmb.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep m batlle2

- **Archivo:JULIA_Exp(z\char"005E\relax{}3)+c_CX=_0.59.jmb.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/3a/JULIA_Exp%28z%5E3%29%2Bc_CX%3D_0.59.jmb.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep m batlle2
- **Archivo:JULIA_SQR(_SINH(Z2)_.jmb.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/85/JULIA_SQR%28_SINH%28Z2%29_.jmb.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep M Batlle i Ferrrer
- **Archivo:JULIA_ZxExp(Z)+C_CX=0.04.jmb.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d5/JULIA_ZxExp%28Z%29%2BC_CX%3D0.04.jmb.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep m batlle2
- **Archivo:Julia_set_camp2.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/27/Julia_set_camp2.jpg *Licencia:* Public domain *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* António Miguel de Campos - en:User:Tó campos
- **Archivo:Koch_anime.gif** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/bf/Koch_anime.gif *Licencia:* CC-BY-SA-3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Christophe Dang Ngoc Chan (cdang)
- **Archivo:Laplace'{}s_equation_on_an_annulus.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/85/Laplace%27s_equation_on_an_annulus.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* DavidianSkitzou
- **Archivo:LorenzAttractor.png** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/25/LorenzAttractor.png *Licencia:* CC-BY-SA-3.0 *Colaboradores:* ? *Artista original:* ?
- **Archivo:Lorenz_attractor_yb.svg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/5b/Lorenz_attractor_yb.svg *Licencia:* CC-BY-SA-3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio based on images Image:Lorenz system r28 s10 b2-6666.png by User:Wikimol and Image:Lorenz attractor.svg by User:Dschwen *Artista original:* User:Wikimol, User:Dschwen
- **Archivo:MANDEL_SIN(ZxC\char"005E\relax{}2).jmb.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/fa/MANDEL_SIN%28ZxC%5E2%29.jmb.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep M Batlle i Ferrrer
- **Archivo:MANDEL_Z10+C_medium.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/27/MANDEL_Z10%2BC_medium.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep M Batlle i Ferrer
- **Archivo:MANDEL_Z11+C_medium.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/36/MANDEL_Z11%2BC_medium.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep M Batlle i Ferrer
- **Archivo:MANDEL_Z12+C_medium.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/6c/MANDEL_Z12%2BC_medium.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep M Batlle i Ferrer
- **Archivo:MANDEL_Z2+C.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/0c/MANDEL_Z2%2BC.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep M Batlle i Ferrer
- **Archivo:MANDEL_Z3+C.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/6a/MANDEL_Z3%2BC.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep M Batlle i Ferrer
- **Archivo:MANDEL_Z4+C.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c0/MANDEL_Z4%2BC.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep M Batlle i Ferrer
- **Archivo:MANDEL_Z5+C.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/4a/MANDEL_Z5%2BC.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep M Batlle i Ferrer
- **Archivo:MANDEL_Z6+C_medium.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/dd/MANDEL_Z6%2BC_medium.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep M Batlle i Ferrer
- **Archivo:MANDEL_Z7+C_medium.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/8b/MANDEL_Z7%2BC_medium.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep M Batlle i Ferrer
- **Archivo:MANDEL_Z8+C_medium.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/78/MANDEL_Z8%2BC_medium.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep M Batlle i Ferrer
- **Archivo:MANDEL_Z9+C_medium.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/85/MANDEL_Z9%2BC_medium.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep M Batlle i Ferrer
- **Archivo:Mandel.jmb_001.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/80/Mandel.jmb_001.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep M Batlle I Ferrer
- **Archivo:Mandel20.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/4e/Mandel20.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep m batlle
- **Archivo:Mandel2i.jmb.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/01/Mandel2i.jmb.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep m batlle2
- **Archivo:Mandel3i.jmb.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/ed/Mandel3i.jmb.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep m batlle2
- **Archivo:Mandel4i.jmb.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7e/Mandel4i.jmb.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep m batlle2
- **Archivo:Mandel5i.jmb.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/2a/Mandel5i.jmb.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep m batlle2
- **Archivo:Mandel6i.jmb.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/6b/Mandel6i.jmb.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep m batlle2
- **Archivo:Mandel7i.jmb.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/aa/Mandel7i.jmb.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep m batlle2
- **Archivo:Mandel_Cos(ZxC3).jmb.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/ef/Mandel_Cos%28ZxC3%29.jmb.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep M Batlle Ferrer

- **Archivo:Time_escape_Julia_set_from_coordinate_(phi-2,_phi-1).jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/ca/Time_escape_Julia_set_from_coordinate_%28phi-2%2C_phi-1%29.jpg *Licencia:* Public domain *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Solkoll
- **Archivo:Z2_+_C2_(C4+_0,1).jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/5d/Z2_%2B_C2_%28C4%2B_0%2C1%29.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep M Batlle i Ferrer
- **Archivo:Z2_+_C2_(C4-0,25).jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d9/Z2_%2B_C2_%28C4-0%2C25%29.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep M Batlle i Ferrer
- **Archivo:Z2xEXP(Z).jmb.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/16/Z2xEXP%28Z%29.jmb.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep M Batlle i Ferrer
- **Archivo:Z3xExp(Z).jmb.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/65/Z3xExp%28Z%29.jmb.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep M Batlle i Ferrer
- **Archivo:Z4xExp(Z).jmb.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/51/Z4xExp%28Z%29.jmb.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep M Batlle i Ferrer
- **Archivo:Z\char"005E\relax{}2+Z_LN(Z).jmb.jpg** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/90/Z%5E2%2BZ_LN%28Z%29.jmb.jpg *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Josep M Batlle i Ferrer

9.8.3 Licencia del contenido